Und was studierst du?

Die Juniorprofessorin für Gruppen und Geometrien stellt sich vor

In meinen ersten Wochen in Halle bin ich ständig gefragt worden, was ich studiere. Falls nach der Antwort „Mathematik“ noch weiteres Interesse bestand, habe ich natürlich aufgeklärt, dass ich mich nicht durch einen modularisierten Studiengang wühle oder meine Diplomarbeit schreibe. ☺

Von Birmingham nach Halle

Es ist mir leicht gefallen, mich in Halle zu Hause zu fühlen. Das gilt für das Institut für Mathematik genauso wie für die Stadt, und ein Hauptgrund war sicher der herzliche Empfang durch meine neuen Kolleginnen und Kollegen. In Birmingham ging es mir ganz ähnlich – trotz der plötzlichen Umstellung, trotz Fernbeziehung, trotz anfangs großer Anstrengungen, die Endphase meiner Promotion und den Start an einer neuen Universität unter einen Hut zu bekommen, war es schon nach kurzer Zeit so, als sei ich nie woanders gewesen. Was das betrifft, habe ich sicher Glück gehabt, denn häufige Ortswechsel werden ja zu Beginn einer Universitätslaufbahn immer mehr zur Regel.
Auch an anderer Stelle spielte Glück eine Rolle. Ohne dass einer der Beteiligten das hätte ahnen können, hat mich die Zeit in Birmingham in vielerlei Hinsicht gut auf eine Juniorprofessur vorbereitet. Beispielsweise konnte ich in einem für Forschungsassistenten absolut unüblichen Umfang Lehrerfahrung sammeln, und das nicht nur in kleinen Spezialveranstaltungen, sondern in Standardvorlesungen mit zum Teil über 100 Studierenden. Gleichzeitig blieb viel Zeit zum Forschen, da die Lehrtätigkeit sich auf wenige Monate im Jahr beschränkte und größere administrative Aufgaben grundsätzlich von mir ferngehalten wurden.
Meine Kollegen haben mir immer wieder deutlich gemacht, wie wichtig es ist, bei allem Enthusiasmus und bei allem Verständnis für die Probleme der Studierenden nicht rund um die Uhr ansprechbar zu sein. Manche von ihnen waren und sind selbst nicht immer konsequent darin, Grenzen zu ziehen und zum Beispiel auf die Einhaltung von Sprechstunden zu bestehen. Die Gründe dafür sind ganz unterschiedlich, und mich hat in den Gesprächen mit ihnen immer sehr interessiert, ob und in welchem Umfang das ihrer Forschungstätigkeit abträglich ist, wie sie mit diesem Zwiespalt umgehen und ob sich ihr Umgang mit den Studierenden im Laufe der Jahre verändert hat. Diese Fragen haben mich die ganze Zeit in Birmingham begleitet und bekommen jetzt, hier in Halle, natürlich eine noch viel größere Bedeutung.

Rückblickend hatte auch mein Status, der irgendwo zwischen „PostDoc“ und „Lecturer“ war, eigentlich nur Vorteile für mich - besonders durch die Altersnähe zu den dortigen (zahlreichen!) Doktorand(inn)en und PostDocs, die mich ganz selbstverständlich in ihre Gruppe aufnahmen. Ehrlich gesagt empfand ich mich auch selbst noch eher als Studentin und habe diese Zeit sehr genossen, weil ich noch nicht so schnell „erwachsen“ werden musste. Deshalb habe ich auch gezögert, mich auf eine Juniorprofessur zu bewerben. Natürlich war eine solche Position ein logischer nächster Schritt, und auf viele der Aufgaben fühlte ich mich gut vorbereitet, aber ...

... neben meiner eigenen Forschung noch zwei oder drei Doktorarbeiten betreuen?
... dazu noch weitere Abschlussarbeiten?
... Lehre mit zwar reduzierter Stundenzahl, aber der vollen Verantwortung?
... großer Publikationsdruck, möglichst noch nebenbei eine Habilitationsschrift anfertigen?

Ich bin froh, dass das Thema „Juniorprofessur“ mich schon eine Weile beschäftigt hatte, bevor ich zum ersten Mal eine dahingehende Stellenauschreibung sah, die inhaltlich in Frage kam. Denn so war genügend Zeit, über die Risiken nachzudenken und mich mit Kollegen auszutauschen, und als es dann um die konkrete Bewerbung auf die Stelle in Halle ging, waren viele Bedenken ausgeräumt oder relativiert. Was zählte, war die Herausforderung, die erste Hürde im Berufungsverfahren zu meistern.
Im Nachhinein denke ich, dass es kaum hätte besser kommen können und dass zumindest einige meiner Sorgen völlig unbegründet waren!

Warnungen und Selbstbeobachtung

Als Doktorand und PostDoc tut man sicher gut daran, „Leidensgenossen“ und erfahrenere Kollegen in Entscheidungen mit einzubeziehen und ihren Rat nicht nur zu mathematischen Fragen in Anspruch zu nehmen. Leider bleibt man gleichzeitig nicht verschont von denen, die unabhängig von persönlicher Kenntnis oder auch nur fachlicher Nähe und häufig völlig ungefragt ihren Senf dazugeben. Aus solchen Ecken kommen dann Ratschläge wie „Sie sollten auf keinen Fall Gruppentheorie machen – schon gar nicht endliche Gruppen, das interessiert doch keinen Menschen!“ oder einfach „Gehen Sie in die Didaktik!“. Besonders interessant wird es, wenn sich herumspricht, dass und wo man sich auf eine Stelle bewirbt. Manch ein Kollege hielt es für selbstverständlich, dass ich als Juniorprofessorin an einer mittelgroßen Uni gar nicht anders enden kann als auf dem Abstellgleis, mit Lehre und Verwaltung zugemüllt, mit ungefähr jeder Aufgabe betraut, die „mal lieber eine freundliche junge Frau machen sollte“. Aha.
Solche Kommentare haben natürlich etwas Gutes. Im besten Fall durchleuchtet man seine eigene Position und setzt sie ernsthaft der Kritik aus, um mit einem gegebenenfalls korrigierten, aber jedenfalls klareren Standpunkt solche Äußerungen zu den Akten legen zu können (und beim nächsten Mal vielleicht schlagfertig zu reagieren?). Es gibt auch die Option, es einfach an sich abprallen zu lassen, aber darin bin ich ehrlich gesagt nicht besonders gut. Reagieren kann ich also nur im Nachhinein, mit einer sich weiter entwickelnden Selbstbeobachtung, und häufig kann ich dann zumindest innerlich solche Warnungen entkräften – aber eben nicht immer. So hat etwa der Kollege, der mir geraten hat, mich von der Gruppentheorie zu verabschieden, möglicherweise Recht: Vielleicht gehe ich mit meinen Forschungsinteressen und mit meinen konkreten Projekten ein Risiko ein. Wird das besser dadurch, dass ich es sehenden Auges tue? Ich bin jedenfalls viel zu dickköpfig und liebe das, was ich tue, viel zu sehr, um es wegen einer solchen (eventuell sogar gutgemeinten) Ermahnung aufzugeben. Wie wichtig und aktuell außerdem die Forschung in der Theorie der endlichen Gruppen ist, zumindest in meinen Augen, wird später noch Thema sein.

Was ich sehr ernst nehme, ist der Zwiespalt zwischen meiner Neigung, viel Zeit mit der Vorbereitung und Begleitung von Lehrveranstaltungen und im Gespräch mit Studierenden zu verbringen, einerseits und der Notwendigkeit, die so verwandte Zeit zu begrenzen und mich möglichst stark auf meine Forschung zu konzentrieren, andererseits. Meine bisherigen Erfahrungen in Halle bestätigen die Befürchtung, dass ich dieses Problem in den nächsten Jahren nicht so leicht werde

lösen können. Engagement und Einsatz für die Lehre sind mir wichtig, und zwar nicht nur bis zu einem Niveau, wo die Vorlesungen und die Betreuung „ganz gut“ sind. Nein, ich möchte ein Vorbild für die Studierenden sein, gut vorbereitet, zuverlässig, motivierend, und ich möchte nicht nur akzeptable, sondern wirklich gute Vorlesungen halten. Vielleicht ist das übertrieben, aber ich empfinde tatsächlich so! Leider kosten die Lehraufgaben bei einem solchen Anspruch etwas mehr Zeit und können selbst bei großem Erfolg nicht den Weg zu einer Professur ebnen, sondern werten höchstens eine auf der Seite der Forschung bereits starke Bewerbung weiter auf.
Bestimmt schlagen sich viele Nachwuchswissenschaftler mit diesem Konflikt herum – Juniorprofessoren sicher besonders, weil sie ja bereits viel Verantwortung tragen und beweisen müssen, dass sie der Doppelbelastung schon so früh gewachsen sind. Deswegen ist es gut zu wissen, dass ich mir bei meinen Kolleginnen und Kollegen Rat holen und von ihrer Erfahrung profitieren kann. Besonders dankbar bin ich meinem Kollegen Stroth, der gleich im Büro nebenan sitzt und mit dem ich gern über mathematische Fragen spreche, der mir aber auch insgesamt geholfen hat, mich in meiner Rolle zurechtzufinden.

Mehr „Junior“ oder mehr „Professorin“?

Bei einer Juniorprofessur drängt sich reflexartig die Assoziation „jung“ auf, obwohl mit dieser Position so viel Verantwortung einhergeht und der Begriff „Verantwortung“ eher in der Erwachsenenwelt verankert ist. Deshalb erstaunt mich, wie oft mein Alter zum Thema gemacht wird. Auffällig ist, dass es in der Wahrnehmung von außen eine viel größere Rolle zu spielen scheint als unter Kollegen, was vielleicht ein Indiz dafür ist, dass es eigentlich um das Bild von Mathematikern oder generell von Akademikern in der Gesellschaft geht. Natürlich ist es schmeichelhaft und führt häufig zu lustigen Situationen, wenn ich auf dem Campus, beim Sport oder in der Bibliothek für eine Studentin gehalten werde – daher auch der Titel – in ein paar Jahren ist das vorbei! Ist es also auch Eitelkeit, die mich davon abhält, mich zum Beispiel strenger („standesgemäßer“?) zu kleiden oder förmlicher mit den Studierenden umzugehen, um die Autorität auszustrahlen, die man mit dem Wort „Professorin“ verbindet? (Glücklicherweise laufen ja viele Kollegen auch nicht ständig im Anzug herum, da fühle ich mich also wohl.)
In Birmingham haben der eher geringe Altersunterschied und die sprachkulturellen Gegebenheiten dazu geführt, dass ich mich mit den Studierenden auf Vornamen-Basis am wohlsten gefühlt habe. Das passt zu meinem Umgangston und ergab sich hier in Halle mit den fortgeschritteneren Studierenden genauso. Auf Nachfragen meinerseits haben diese mir dann erklärt, dass sie es teilweise zu Anfang seltsam fanden, inzwischen aber als ganz normal ansehen. Begründet haben sie die anfängliche Unsicherheit damit, dass sie Professor(inn)en eben grundsätzlich als Respektspersonen wahrnehmen – und zwar auch bei einem „Junior-“ davor und schlumpfigem Auftreten. In einer Erstsemesterveranstaltung würde ich wohl dazu neigen, zum üblichen „Sie“ zurückzukehren. Und wer weiß, vielleicht finde ich ja irgendwann Gefallen daran, mit „Professor Waldecker“ angesprochen zu werden!

In Wirklichkeit ist es nicht oder zumindest nicht allein das Alter, was auffällt, sondern das Gesamtpaket „Mathematiker-Frau-jung-ganz nett und lacht viel“. Für Außenstehende ein gefundenes Fressen, ihre Vorurteile aufzuzählen, nur um sich anschließend ungläubig die Augen zu reiben, ist es für Studierende anscheinend eine positive Überraschung und sehr motivierend. Die Rückmeldungen der Studierenden legen nahe, dass für sie genau wie (meistens) in meiner Selbst-

wahrnehmung der Wortbestandteil „Junior“ ausschlaggebend ist.
Gewisse Aspekte der Lehre machen mir aber den „Professorin“-Anteil sehr bewusst, nämlich immer dann, wenn es um die Verantwortung für die Studierenden geht. Das ist bei der konkreten Planung und Vorbereitung von Veranstaltungen der Fall, bei Prüfungen, bei allen Fragen der Einzelbetreuung (etwa für Abschlussarbeiten) und besonders dann, wenn Probleme auftauchen. Die Studierenden müssen sich da absolut auf meine Kompetenz und Umsicht verlassen können und müssen meiner Einschätzung vertrauen - aber eben auch nicht blind, für den Fall, dass sie mal ungerecht behandelt werden. An dieser Stelle spielt nach meiner Einschätzung die Vorbildfunktion eine große Rolle. In unserer Position als Dozenten sind wir von Anfang an automatisch Vorbilder - mal gut, mal schlecht, und das ist besonders in der Lehrerausbildung wichtig. Denn geht es uns nicht allen so, dass die besonders guten und die besonders schlechten Lehrer(inn)en den größten Eindruck hinterlassen?
Während meines Studiums in Kiel hatte ich viele sehr gute Professoren (dass keine Frau darunter war, ist damals weder Thema gewesen noch schien es jemanden zu stören), deren Vorlesungsstil mich stark beeinflusst hat. Unter den Übungsleitern war das Bild schon eher durchwachsen, und wir Studis begannen dann, in Einzelfällen die Kompetenz eines Übungsleiters anzuzweifeln und uns zu ärgern, wenn etwa Rückfragen nicht geklärt werden konnten oder Lösungsvorschläge fehlerhaft waren. Dabei ging es vielen von uns so, dass es nicht die Fehler selbst waren oder Unsicherheit, womit wir uns unwohl fühlten, sondern es hatte eher etwas mit Souveränität zu tun. Für mich selbst habe ich herausgefunden, dass ich empfindlich darauf reagiere, wenn jemand einen Fehler nicht zugibt, sich herausredet oder versucht, es so darzustellen, als habe man da gerade eine extrem dumme Frage gestellt. Im Laufe der Jahre konnte ich neben vielen Beispielen für ausgezeichneten Unterricht und sehr gute Betreuung auch Beispiele für einen schlechten Umgang mit eigenen Schwächen sammeln und bemühe mich sehr, daraus zu lernen und das auch weiterzugeben. Wieder betrifft das zukünftige Lehrer(innen) besonders, und wenn es darum geht, lasse ich im Gespräch mit ihnen gern meine eigene Erfahrung sprechen:

Man verscherzt sich schnell, zuverlässig und nachhaltig das Vertrauen und den Respekt eines Schülers, wenn man wegen mangelnden Hintergrundwissens wiederholt nicht kompetent auf Fragen antworten kann, wenn man versucht, etwaige Wissenslücken zu überspielen und wenn man auf die Neugier der Schüler mit Unsicherheit und Angst vor den Grenzen des eigenen Wissens reagiert.
Deshalb streite ich mich auch mit Vergnügen mit jedem, der meint, man könne doch problemlos die mathematische Ausbildung der folgenden Lehrergenerationen immer weiter zusammenstreichen und sich auf Schulstoff und didaktische Fähigkeiten konzentrieren. Und bei diesem Thema fühlt es sich mehr nach „Professorin“ an als nach „Junior“.

In der konkreten Betreuung von Studierenden, zum Beispiel bei Abschlussarbeiten, sammle ich jetzt in Halle die ersten Erfahrungen. Dort waren meine Bedenken besonders groß, denn ich empfinde es als schwierig, in meinem Forschungsgebiet interessante offene Fragen zu finden, bei denen ich sofort einschätzen kann, wie schwierig sie sind. Genau das ist aber für die Auswahl eines guten (Promotions-)Projekts erforderlich. Auf der Ebene eines Seminarvortrags oder einer Bachelorarbeit ist es einfacher, zumal dort eine unmittelbare Nähe zu meinen eigenen Forschungsprojekten gegeben sein kann, aber nicht muss. Deswegen steht dafür eine größere Bandbreite an Themen zur Verfügung. Hätte ich aber viele Doktorand(inn)en, so sähe ich eine gewisse Gefahr, zu viele leicht zugängliche Projekte aus meinem Interessengebiet in deren Hände zu geben und selbst

hauptsächlich an „dicken Brocken“ zu arbeiten.
Diese Sorgen sind da; ich werde das in den nächsten Jahren immer wieder abwägen müssen. Aber dem steht ein großer genereller Enthusiasmus gegenüber – schließlich ist doch die Nachwuchsförderung eine unserer schönsten Aufgaben! Meine Doktorandin, mein Bachelor-Student und ich bilden zusammen ein kleines Arbeitsgrüppchen, das sich in den nächsten Jahren verändern und hoffentlich noch Zuwachs bekommen wird. So groß meine Zweifel vorher waren, so groß ist jetzt mein Spaß bei der Arbeit mit ihnen.

Forschungsinteressen

Mein Interesse an Gruppentheorie wurde im dritten Semester geweckt, in der Vorlesung „Algebra I“ bei Helmut Bender, meinem späteren Doktorvater. Das Echo auf seinen Vorlesungsstil und seine Übungsaufgaben war geteilt – vor allem diejenigen Aufgaben, die mit dem Inhalt der Vorlesung kaum etwas zu tun hatten und stets mit „Sei G eine endliche Gruppe und...“ begannen, trieben uns (und gelegentlich auch den Übungsleiter) zur Verzweiflung. Allein das war für mich schon Grund zur Faszination: Eine endliche Menge, eine Verknüpfung mit ein paar Eigenschaften, und schon tut sich da ein ganzes Universum auf! Dass unser Übungsleiter, den wir alle für absolut brilliant hielten, da manchmal mit seinem Latein am Ende war, tröstete mich vor allem dann, wenn er mir eine Lösung erklärt hatte und ich wieder mal dachte, dass ich allein in hundert Jahren nicht auf eine solche Idee gekommen wäre. Gleichzeitig nahm ich an einem Gruppentheorie-Proseminar teil und hatte damit einen anderen Zugang zum gleichen Thema mit eher leicht verdaulichen Happen. Die gründliche Einarbeitung in die Theorie der endlichen Gruppen kam mit einem Seminar und späteren zahlreichen Spezialvorlesungen, und erst gegen Ende meines Studiums hörte ich zum ersten Mal eine Gruppentheorie-Grundvorlesung. Das war wieder bei Bender, und als Betreuerin der Übungen hatte ich manchmal ganz schön Mühe, die Aufgaben erstmal selbst zu lösen und den Studierenden dann gute Hinweise zu geben. In seiner Vorlesung zur Darstellungstheorie im darauffolgenden Semester erwähnte Bender dann einen Satz von Glauberman, der zum Thema meiner Dissertation und zur Grundlage meines wichtigsten Forschungsprojekts werden sollte.
So war von Anfang an eine klare Richtung vorgegeben - ich hatte bei allen drei Gruppentheoretikern in Kiel zahlreiche Vorlesungen gehört, aber mein Herz schlug für die lokale Theorie, und das zieht sich deutlich sichtbar durch meine Forschungsprojekte. Mit „lokaler Theorie“ meine ich dabei die Gesamtheit an Methoden, die geeignet sind, das Innenleben einer endlichen Gruppe zu verstehen, indem man sich für verschiedene Primzahlen p Normalisatoren von p-Untergruppen (also Untergruppen, deren Ordnung eine p-Potenz ist) und Zentralisatoren von p-Elementen (also Elementen, deren Ordnung eine p-Potenz ist) anschaut. Je nachdem, für welche Eigenschaften man sich interessiert, kann man sich auf einfache Gruppen beschränken, also auf Gruppen G, die nur die Normalteiler $\{1\}$ und G haben.

Zwei Beispiele:
Ist G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, so garantiert der Satz von Sylow die Existenz von p-Untergruppen, deren Ordnung genau die größte p-Potenz ist, die $|G|$, die Anzahl der Gruppenelemente, teilt. Weiter sind diese p-Sylowuntergruppen von G bereits in G konjugiert. Normalisatoren von p-Untergruppen und insbesondere von p-Sylowuntergruppen sind also interessante Objekte, genau wie die Sylowuntergruppen selbst. Kann man nun zum Beispiel eine endliche einfache Gruppe anhand der Gestalt ihrer p-Sylowuntergruppen charakterisieren? Kann man es für

bestimmte Primzahlen? Tatsächlich ist die Primzahl 2 ausgezeichnet, denn seit dem Satz von Feit und Thompson wissen wir ja, dass die Ordnung jeder nicht-abelschen einfachen Gruppe durch 2 teilbar ist. Und in der Tat kann man in bestimmten Spezialfällen endliche einfache Gruppen an der Gestalt ihrer 2-Sylowuntergruppe „erkennen“.
Betrachten wir jetzt anstelle von großen Untergruppen nur einzelne Elemente: Ist wieder eine Primzahl p gegeben und diesmal in unserer endlichen einfachen Gruppe G ein Element a der Ordnung p, so betrachten wir den Zentralisator $C_G(a) := \{g \in G \mid ag = ga\}$. Enthält er genügend Informationen, um die Gruppe G zu charakterisieren? Ist er nicht vielleicht nur eine winzige Untergruppe der eventuell riesigen Gruppe G? Hilft es, wenn wir unser Element a geschickt wählen? Auch hier spielt die Primzahl 2 eine Ausnahmerolle. Tatsächlich war ja einer der Leitgedanken der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, ausgehend vom Zentralisator einer Involution (also eines Elements der Ordnung 2) möglichst viel vom Innenleben einer Gruppe aufzudecken. Ziel war, eine Liste zu erstellen, auf der bis auf Isomorphie alle endlichen einfachen Gruppen vertreten sind. Dass eine solche Strategie überhaupt Erfolg haben könnte, war seit dem Satz von Brauer und Fowler bekannt, demzufolge es immer nur endlich viele verschiedene endliche einfache Gruppen gibt, in denen der Zentralisator einer Involution eine vorgegebene Gestalt hat.

Wenn man sich nun, ausgehend von gewissen Voraussetzungen, wirklich für die innere Struktur einer Gruppe interessiert, dann tauchen zum Beispiel Fragen der folgenden Art auf:

– Wie vererben sich die Voraussetzungen? Auf Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppen?
– Gibt es ausgezeichnete Primzahlen? Welche Informationen liefert das?
– Welche Objekte (Untergruppen, Elemente,...) interessieren uns genau und auf welche Situationen stoßen wir?
– Gibt es bereits lokale Methoden, um solche Situationen zu behandeln? Gibt es Sätze, mit denen wir bestimmte Spezialfälle loswerden?

Eine wichtige Frage ist auch, ob man sich im Vorfeld auf bestimmte Methoden festlegen möchte bzw. ob man auf die Anwendung bestimmter Resultate verzichten möchte. So kann man zum Beispiel Fragen über endliche einfache Gruppen beantworten, indem man deren Klassifikation zu Rate zieht und sich jeden einzelnen Fall anschaut. Andererseits lernt man aber vielleicht mit einem davon unabhängigen Ansatz mehr über das Problem und damit auch mehr über einfache Gruppen in ihrer Gesamtheit. Und möchte man immer gleich mit Kanonen auf Spatzen schießen?

Um all das mit Leben zu füllen, möchte ich ein konkretes Beispiel betrachten und darauf aufbauend mein wichtigstes Forschungsprojekt vorstellen.
Dazu sei von jetzt an G eine beliebige endliche Gruppe und $z \in G$ eine Involution, also ein Element der Ordnung 2. Wie üblich sei $Z(G)$ das Zentrum von G, also die Menge aller Gruppenelemente, die mit jedem Gruppenelement vertauschbar sind. Wir gehen zurück zur oben angedeuteten Idee, dass wir uns ausgehend vom Zentralisator $C_G(z)$ die Struktur der Gruppe G erschließen wollen. Die Vorstellung dabei ist, dass unsere Informationen auf $C_G(z)$ beschränkt sind, wir also nur etwas über die Untergruppe derjenigen Elemente wissen, die mit z vertauschbar sind. Da das vielleicht nur ganz wenige Elemente sind, ist die Frage, wie wir überhaupt jemals etwas über andere Untergruppen von G herausfinden können! Ein extremes Beispiel dafür ist die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$, die Symmetriegruppe des Dreiecks. Sie besteht aus den Spiegelungen, die jeweils eine Ecke festlassen, aus zwei Drehungen um 120 bzw. 240 Grad und der identischen Abbildung, die nichts tut. Die Spiegelungen haben alle Ordnung 2, sind also Involutionen. Was sind ihre Zentralisato-

ren? Bei der Hintereinanderausführung zweier verschiedener Spiegelungen spielt die Reihenfolge eine Rolle, also sind zwei verschiedene Involutionen in dieser Gruppe nie vertauschbar. Aber auch Drehungen und Spiegelungen sind hier nie vertauschbar! Jede Involution kommutiert also nur mit sich selbst und der Identität, der Zentralisator hat Ordnung 2. Diese Beobachtungen lassen sich auf die Symmetriegruppe des regelmäßigen Fünfecks etc. übertragen, so dass wir nun für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}$ wissen, dass in der Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks der Zentralisator jeder Involution die Ordnung 2 hat.

Gehen wir nun umgekehrt von einer Gruppe G aus und setzen voraus, dass der Zentralisator jeder Involution Ordnung 2 hat, so haben wir also unendlich viele Möglichkeiten, wie G aussehen kann! (Hier ist G wohlgemerkt keine einfache Gruppe. In den genannten Symmetriegruppen bilden die Drehungen einen Normalteiler ungerader Ordnung.)
Das Problem ist, dass unser Involutionenzentralisator so klein ist, dass er uns keine Informationen über andere Untergruppen von G liefert. An diesem Beispiel sehen wir, dass die Strategie, die wir verfolgen wollen, um G kennen zu lernen, nicht automatisch zum Erfolg führt!
Zurück zu unserer beliebigen endlichen Gruppe G und unserer Involution z. Die Struktur von $C_G(z)$ ist als bekannt vorausgesetzt, und da Konjugation mit Gruppenelementen ein Automorphismus von G ist, kennen wir nun auch den Zentralisator jeder zu z konjugierten Involution. Sei daher $g \in G$ und $s := z^g$, also s zu z konjugiert. Dabei verwenden wir die Abkürzung $z^g := g^{-1}zg$. Es kann uns natürlich passieren, dass s und z gar nicht verschieden sind, wir mit $C_G(s)$ also gar keine neue Untergruppe betrachten. Falls wir aber kein von z verschiedenes Konjugiertes in G finden können, so bedeutet das doch, dass $z^g = z$ ist für alle $g \in G$. Aber dann ist z mit jedem Gruppenelement vertauschbar, also $z \in Z(G)$! In diesem Fall ist $C_G(z)$ schon die ganze Gruppe, es ist nichts mehr für uns zu tun.
Nehmen wir also an, dass wir ein von z verschiedenes Konjugiertes s wie oben finden können. Dann haben $C_G(z)$ und $C_G(s)$ die gleiche Struktur. Falls diese Untergruppen gleich sind oder sich nur in 1 schneiden, dann können wir wenig tun – im ersten Fall haben wir nichts dazugelernt, im zweiten Fall können wir nicht von $C_G(z)$ zu $C_G(s)$ gelangen und haben deshalb kaum Möglichkeiten, unsere Informationen zu kombinieren und etwas Neues herauszufinden. Am günstigsten ist der Fall, wo sich $C_G(z)$ und $C_G(s)$ in einer echten, nicht zu kleinen Untergruppe schneiden. Dann haben wir nämlich den Teil der Gruppe vergrößert, über den wir etwas wissen. Wenn wir nun in unserer Vorstellung diesen Schritt wiederholen, dann können wir hoffen, bei jedem neuen Konjugierten von z immer mehr von G zu „überdecken“ mit Untergruppen, deren Struktur wir kennen!
Noch etwas konkreter: Falls wir ein zu z Konjugiertes s finden, $s \neq z$, das mit z vertauschbar ist, dann liegen diese beiden Involutionen in $C_G(z) \cap C_G(s)$ und stellen eine Verbindung zwischen diesen beiden Untergruppen her, wie gewünscht. Die Frage ist also: Was passiert, wenn es ein solches Element nicht gibt? Was passiert, wenn kein Konjugiertes von z (außer z selbst) mit z vertauschbar ist?

Diese Eigenschaft hat einen Namen. Unsere Involution z heißt **isoliert** in G, falls der Zentralisator $C_G(z)$ kein Konjugiertes von z in G enthält außer z selbst.
In den Symmetriegruppen, die wir oben betrachtet haben, sind die Spiegelungen isoliert. Denn dort sind alle Spiegelungen Involutionen, sie sind alle konjugiert, aber zwei verschiedene Spiegelungen sind niemals vertauschbar.
Aus dem Jahr 1966 stammt ein Resultat von George Glauberman über Gruppen mit isolierten

Involutionen:

Z^***-Satz (Glauberman).** *Sei $z \in G$ eine isolierte Involution. Dann hat G einen Normalteiler N ungerader Ordnung derart, dass das Bild von z in G/N im Zentrum liegt.*

Der Name Z^*-Satz kommt daher, dass bei einem möglichst großen Normalteiler N von ungerader Ordnung das Urbild von $Z(G/N)$ einen eigenen Namen hat; es wird mit $Z^*(G)$ bezeichnet.

Kehren wir ein letztes Mal zu den Symmetriegruppen von regelmäßigen n-Ecken für ungerade $n \in \mathbb{N}$ zurück, so sehen wir sofort einen geeigneten Normalteiler ungerader Ordnung, nämlich die Untergruppe, die aus allen Drehungen besteht. (Die dazugehörige Faktorgruppe hat dann sogar nur Ordnung 2.)
Die besondere Bedeutung der Primzahl 2 für die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen – kurz: Klassifikation – wurde ja oben bereits herausgestellt. Dass Glaubermans Z^*-Satz in diesem Zusammenhang eine große Rolle spielt, wird deutlich, wenn wir das Resultat auf eine nicht-abelsche endliche einfache Gruppe G anwenden.
Wir wissen dann, dass G gerade Ordnung hat, dass $Z(G) = 1$ ist und dass es keinen nicht-trivialen Normalteiler ungerader Ordnung in G gibt. Ist nun $t \in G$ eine Involution, so darf sie wegen des Z^*-Satzes nicht isoliert in G sein. Damit finden wir eine zu t konjugierte Involution $s \in G$, die mit t vertauschbar ist. Es existiert also eine Verbindung zwischen $C_G(t)$ und $C_G(s)$ genau in der Art, wie wir es weiter oben diskutiert haben.

Es gibt einen Beweis für dieses Resultat, von Glauberman selbst, aber bisher existiert kein vollständiger Beweis mit den Methoden der lokalen Theorie. Wünschenswert wäre ein solcher aber in mehrfacher Hinsicht, was erklärt, dass es in den über 40 Jahren einige Versuche in dieser Richtung gab!

Philosophische Gründe: Ist es möglich, diesen Satz, der sich als so fundamental für die Klassifikation herausgestellt hat, mit Methoden aus der Gruppentheorie, möglichst mit lokalen Mitteln, zu beweisen? Dabei verstehe ich dieses Bestreben nicht so, dass der Einsatz „gruppentheoriefremder“ Argumente um jeden Preis vermieden werden soll, sondern es geht eher darum, zu testen, ob lokale Argumente in eine Richtung entwickelt werden können, wo Fortschritte möglich sind. Es geht also um beides – die Fülle neuer Argumente, die sich durch Anwendungen eröffnen, aber auch die Frage: Ist die lokale Theorie stark genug, um das Resultat aus sich selbst heraus zu begründen?
Methodische Gründe: Der Satz ist sehr tiefliegend. Daher ist die Hoffnung berechtigt, dass schon beim Versuch, ihn erneut zu beweisen, neue Methoden entwickelt und bestehende verbessert werden. Es gibt zahlreiche Beispiele für gruppentheoretische Sätze, die nicht nur durch ihre Konsequenzen in den konkreten Anwendungen die Gruppentheorie vorangebracht haben, sondern die durch die im Beweis verwendeten Argumente neue Strategien aufgezeigt haben, mit denen dann andere Probleme angreifbar wurden. Es ist daher recht verbreitet, neue Ideen auf ihr Potenzial zu testen, indem man versucht, mit ihnen ein bereits bekanntes Resultat erneut zu beweisen und dann zu beurteilen, ob sich neue Einsichten ergeben haben und ob mit den neuen Argumenten vielleicht ein stärkeres Resultat bewiesen werden kann. Ein berühmtes Beispiel für diese Philosophie ist der Satz von Burnside, nach dem Gruppen, deren Ordnung nur durch zwei Primzahlen teilbar sind, auflösbar sind. (Das heißt, grob gesagt, dass sie aus abelschen Faktorgruppen aufgebaut sind.) Dieser war bereits lange bekannt, als in den 70er Jahren gruppentheoretische Beweise gefunden wurden – mit Methoden, die sich als sehr fruchtbar erweisen sollten!

Inhaltliche Gründe: Es gibt nur wenige Forschritte in Richtung einer Verallgemeinerung für ungerade Primzahlen, und dass man dank der Klassifikation zumindest weiß, dass gewisse Verallgemeinerungen wahr sind, ist ein schwacher Trost. Neue Argumente für den Z^*-Satz öffnen dort möglicherweise eine Tür. Übrigens ist das ein gutes Beispiel für ein Projekt, an dem Gruppen- und Darstellungstheoretiker gleichermaßen interessiert sind. Auf keiner Seite gab es bisher einen Durchbruch, und möglicherweise führen nur gemeinsame Anstrengungen zum Erfolg.

Wie nähern wir uns nun dem Problem?
Nehmen wir an, der Satz sei falsch, und sei dann G eine möglichst kleine Gruppe, in der zwar die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, aber nicht die Aussage. Genauer heißt das, dass wir voraussetzen, dass es in G eine isolierte Involution z gibt, dass dazu aber kein Normalteiler N ungerader Ordnung in G existiert derart, dass das Bild von z in der Faktorgrupe im Zentrum liegt. Anders ausgedrückt: $z \notin Z^*(G)$.
Gleichzeitig wählen wir G diesbezüglich mit möglichst kleiner Ordnung. Eine solche Wahl ist typisch, wir nennen G dann ein minimales Gegenbeispiel oder einen kleinsten Verbrecher. Wir erinnern uns an die eingangs gestellten Fragen:

– Wie vererben sich die Voraussetzungen? Auf Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppen?
Die Eigenschaft, isoliert zu sein, vererbt sich in jede Untergruppe von G hinein, in welcher z liegt. Das sehen wir einfach an der Definition. Ist also $z \in H \leq G$, so ist z isoliert in H. Da wir G als minimales Gegenbeispiel gewählt haben, wissen wir aber, dass der Z^*-Satz in jeder echten Untergruppe von G richtig ist. Ist also $z \in H$ und $H \neq G$, so folgt daraus schon $z \in Z^*(H)$, so dass wir Informationen über echte Untergruppen von G bekommen, die z enthalten. Für Normalteiler gilt das ebenso. Ist nun aber X ein Normalteiler von G, der z nicht enthält und so, dass G/X kleinere Ordnung hat als G, so prüfen wir nach, dass das Bild von z in dieser Faktorgruppe isoliert ist und daher dort in Z^* liegt. Mit dieser Argumentation sehen wir, dass G keinen nicht-trivialen Normalteiler ungerader Ordnung besitzt, dass sogar $Z^*(G) = 1$ ist, und wir fragen uns:
Ist G vielleicht einfach?

– Gibt es ausgezeichnete Primzahlen? Welche Informationen liefert das?
Natürlich ist hier die Primzahl 2 ausgezeichnet. Es liegt ja z in irgendeiner 2-Sylowuntergruppe S von G, und deren Struktur wird davon beeinflusst, dass z isoliert ist. Wir sehen zum Beispiel, dass $z \in Z(S)$ ist.

– Welche Objekte interessieren uns genau und auf welche Situationen stoßen wir?
Unsere Informationen sind auf die Involution z beschränkt – neben der Voraussetzung „isoliert“ wissen wir aber nur, dass z nicht in $Z(G)$ liegt. Das ist sehr wenig! Da wir aber auf einen Widerspruch hinauswollen, müssen wir irgendwie ausnutzen, dass z zwar nicht zentral in G ist, es aber doch zu sein versucht. Der Zentralisator $C := C_G(z)$ ist daher ein interessantes Objekt, schließlich ist er nicht die ganze Gruppe, möchte aber möglichst groß sein! Andere interessante Untergruppen sind solche, die z enthalten, aber nicht in C liegen.

– Gibt es bereits lokale Methoden, um solche Situationen zu behandeln? Gibt es Sätze, mit denen wir bestimmte Spezialfälle loswerden?
Zuerst zur zweiten Frage. Ja, wir können gleich zwei Spezialfälle erledigen, und zwar mit der Annahme, dass die 2-Sylowuntergruppen von G nur genau eine Involution enthalten. Das liefert mit den Sätzen von Burnside bzw. Brauer-Suzuki jeweils einen Widerspruch. Es folgt also sofort, dass unsere 2-Sylowuntergruppe S von G, die z enthält, noch weitere Involutionen hat. Möglichst

große abelsche 2-Untergruppen von G, die viele Involutionen enthalten, ziehen damit unsere Aufmerksamkeit auf sich!
Zur ersten Frage. Es vereinfacht viele Schlüsse, wenn G eine einfache Gruppe ist. Können wir das zeigen? Da das eine Standardreduktion ist, gibt es da typische Argumente, die wir ausprobieren können. Weiter liegt es nahe, sich den Zentralisator C näher anzusehen, vielleicht mit dem Ziel, zu zeigen, dass er eine maximale Untergruppe von G ist. Aber auch die Zentralisatoren anderer Involutionen sind interessante Objekte! Oben wurden bereits große abelsche 2-Untergruppen von G angesprochen. Ist A eine solche, mit $z \in A$ und so, dass jedes Element außer 1 von A die Ordnung 2 hat, dann können wir unter Umständen kontrollieren, wie A auf Untergruppen ungerader Ordnung operiert. Für all das gibt es bereits Methoden, die (gegebenenfalls modifiziert) angewandt werden können.

Da dies mein wichtigstes Projekt ist und gut illustriert, welche Art von Gruppentheorie mir besonders viel Spaß macht, möchte ich kurz den aktuellen Stand des Z^*-Projekts beschreiben und erst anschließend meine Forschungsinteressen allgemeiner erläutern.
Tatsächlich sind viele der oben gestellten naheliegenden Fragen gut zugänglich. So kann man zeigen, dass G einfach ist oder zumindest einen einfachen Normalteiler vom Index 2 hat (der dann natürlich z nicht enthält). Weiter führt die Eigenschaft „isoliert“ von z dazu, dass für jede Involution $a \in G$, die nicht z ist, aber mit z kommutiert, bereits ganz G von $C_G(a)$ und $C_G(az)$ erzeugt wird. Das hilft später bei der Untersuchung von Zentralisatoren von Involutionen ganz allgemein und beim Einsatz von Methoden, die die Operation von 2-Untergruppen auf Untergruppen ungerader Ordnung kontrollieren. Weiter können wir mit Argumenten, die maximale Untergruppen von G miteinander in Beziehung setzen, zeigen, dass C (das war die Abkürzung für $C_G(z)$) tatsächlich selbst eine maximale Untergruppe ist oder aber in Ausnahmefällen echt in einer maximalen Untergruppe liegt, die sehr starke Restriktionen erfüllt.
Wenn wir dann einen möglichst großen Normalteiler ungerader Ordnung von C hernehmen und die dazugehörige Faktorgruppe studieren, finden wir dort mindestens eine im Wesentlichen einfache normale Untergruppe. Wie viele dieser (beinahe) einfachen Untergruppen auftreten, können wir begrenzen – die Idee dabei ist, dass sie jeweils gerade Ordnung haben und dass wir daher, falls es sehr viele davon gibt, eine große abelsche 2-Gruppe in deren Produkt finden, mit der wir arbeiten können.
Diese einfachen Gruppen, die wir dort sehen, spielen die Hauptrolle in der folgenden Analyse. Das Problem ist aber, dass wir im Allgemeinen fast nichts über ihre Gestalt wissen – obwohl wir schon so viele Informationen gesammelt haben, könnte sich in einer Faktorgruppe von C immer noch eine riesige einfache Gruppe aufhalten, die sich unserer Kontrolle entzieht.
Um überhaupt weitermachen zu können, muss beim bisherigen Wissensstand eine Zusatzvoraussetzung her, um böse Überraschungen zu verhindern. Wir setzen also nun voraus, dass jede einfache Gruppe, die wir in einer Faktorgruppe von C sehen, auf der Liste aus der Klassifikation steht.
Das ist eine starke Voraussetzung, denn damit werden alle folgenden Argumente von der Klassifikation abhängig. Andererseits ist ein Hauptinteresse, die Stärke lokaler Methoden zu testen, und das können wir ruhig vor dem Hintergrund der Klassifikation tun. Ein ganz praktischer Gesichtspunkt ist, dass im Beweis des Klassifikationssatzes der Z^*-Satz mit so einem neuen Beweis zitiert werden könnte, denn er wäre innerhalb eines minimalen Gegenbeispiels zum Klassifikationssatz (für die endlichen einfachen Gruppen) problemlos anwendbar. Das allein würde aber für mich

einen so großen technischen Aufwand nicht rechtfertigen.
Ich sehe es eher so: Ein sehr großer Teil der neuen Argumentation kommt ohne Zusatzvoraussetzungen aus und macht viel vom Innenleben des minimalen Gegenbeispiels G sichtbar. Was Ideen betrifft, die anderswo zum Einsatz kommen können, hat sich das Projekt als fruchtbar erwiesen, und ich habe gleichzeitig viel über typische lokale Argumente und ihr Zusammenspiel gelernt. Wenn nun der Bezug auf die Klassifikation notwendig ist, um an einer kritischen Stelle erst mal fortfahren zu können, kann ich damit leben – das Bestreben, es irgendwann vielleicht davon unabhängig zu machen, mit neuen Ideen, bleibt aber bestehen. Ich versuche deshalb, die Extra-Voraussetzung deutlich zu kennzeichnen und sparsam zu verwenden.
Mit ihrer Hilfe ergeben sich viele Konsequenzen: Ist N ein möglichst großer Normalteiler von C von ungerader Ordnung, so können wir die Struktur der Faktorgruppe C/N sehr genau bestimmen und eine Liste der konkret auftretenden Fälle anfertigen. Die Analyse ist aufwendig und streckenweise sehr technisch, aber zum Beispiel völlig unabhängig davon, ob C selbst eine maximale Untergruppe ist oder nicht. Die Liste der Möglichkeiten ist dann der Ausgangspunkt dafür, die Zentralisatoren anderer Involutionen zu untersuchen. Wieder wird es technisch und langwierig, denn typische lokale Argumente für solche Situationen kommen hier oft an ihre Grenzen und müssen angepasst und verfeinert werden. Zum Schluss kommt heraus, dass auch die anderen Involutions-Zentralisatoren eine sehr eingeschränkte Struktur haben und selbst maximale Untergruppen sind oder echt in einer maximalen Untergruppe liegen, die starken Restriktionen genügt. Aus dem Zusammenspiel all dieser Informationen soll dann am Ende der Widerspruch folgen.
Bisher zeigt sich, dass verschiedene lokale Methoden nicht nur weiterentwickelt werden müssen, sondern dass auch erst ihr gezieltes Zusammenspiel neue Fortschritte möglich macht. Dabei kommen viele Argumente zum Einsatz, die im Beweis des Klassifikationssatzes eine Rolle spielen, allerdings in einem Umfeld, das trotz aller technischen Details immer noch wesentlich weniger kompliziert ist.

Mein Eindruck der letzten Jahre ist, dass die Arbeit am Z^*-Satz nicht nur für dieses eine Resultat Früchte trägt, sondern dass die eingesetzten Methoden auch anderswo erfolgreich zum Einsatz kommen. Auf Anregung von Paul Flavell aus Birmingham habe ich mich mit einer lokalen Charakterisierung des **auflösbaren Radikals** beschäftigt, die es bisher nur mit direkter Anwendung der Klassifikation gibt. Als auflösbares Radikal einer endlichen Gruppe bezeichnen wir dabei den größten Normalteiler der Gruppe, der sozusagen aus abelschen Schichten (Faktorgruppen) aufgebaut ist. Während der Arbeit daran hat sich gezeigt, dass manche der Argumente, die im Falle des Z^*-Satzes geradezu maßgeschneidert sind für Involutionen, auch gelegentlich für Elemente ungerader Primzahlordnung greifen. So konnte ich im Zusammenhang mit dieser Frage neue Forschritte erzielen, ohne jedoch bisher das Problem vollständig zu lösen.

Umgekehrt hat das meine Hoffnung verstärkt, dass sich manche der Schlüsse auf Elemente von ungerader Primzahlordnung verallgemeinern lassen, die sich wie isolierte Involutionen verhalten. Damit ließe sich eine Tür öffnen in Richtung eines Z^*-ähnlichen Satzes für ungerade Primzahlen. Meine erste Doktorandin, Imke Toborg, beschäftigt sich mit dieser Fragestellung für die Zahl 3.
Im Zusammenhang mit dem auflösbaren Radikal ist auch wieder der Spezialfall der Primzahl 2 von Interesse. Was können wir über eine endliche Gruppe G sagen, in der für jede 2-Sylowuntergruppe T und jedes $g \in G$ die Untergruppe $\langle T, g\rangle$ auflösbar ist? Nach ein paar Standardreduktionen und mit dem Satz von Feit und Thompson sieht man sofort, dass eine solche Gruppe selbst auflösbar ist. Ich fände es aber viel spannender, auf das (sehr tiefliegende!) Resultat von Feit und

Thompson zu verzichten, also nicht zu verwenden, dass Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind. Stattdessen könnte man sich doch ganz naiv fragen: Wie sieht ein minimales Gegenbeispiel aus? Offenbar spielen Involutionen wieder eine besondere Rolle – können wir etwas über deren Zentralisatoren herausfinden und das bekannte Spiel spielen? Entdecken wir nach dem Motto „Not macht erfinderisch“ neue nützliche Tricks, einfach weil wir uns in der Auswahl der Mittel einschränken?
Mich interessieren auch Fragen, die direkt mit dem Klassifikationssatz zu tun haben. Welche Resultate aus der Zeit vor der Klassifikation müssen noch überprüft und überarbeitet werden, um so in die Strategie des neuen Beweises zu passen, dass keine Lücken bleiben? Das betrifft zum Teil sehr lange und technisch aufwendige Arbeiten, die nicht nur im Hinblick auf die Beweisstrategie und die verwendeten Hintergrundresultate überprüft werden müssen, sondern bei denen Verallgemeinerungen wünschenswert sind. Zur Zeit sieht es so aus, als ob das manchmal nicht mit den verwendeten Methoden allein möglich ist; es muss eine neue Herangehensweise her. An einem solchen Projekt arbeite ich mit Kollegen und Kolleginnen aus Birmingham und Warwick.

Zum Schluss möchte ich noch etwas zur Klassifikation selbst sagen. Mein Eindruck ist, dass nur ganz wenige Menschen überhaupt den Überblick über das gesamte Projekt in seiner ursprünglichen Form – also verteilt auf zahlreiche, zum Teil extrem technische, schwierige Publikationen – haben. Diese sind gerade mit dem Versuch beschäftigt, auf dem Hintergrund ihrer Erfahrung aus vielen vielen Jahren Gruppentheorie einen möglichst geschlossenen Beweis des Klassifikationssatzes aufzuschreiben. Teils parallel dazu, teils mit Überschneidungen gibt es von Experten des gleichen Formats einen neuen Ansatz, sich der Klassifikation zu nähern und dabei methodisch einheitlicher zu verfahren. Mir fällt dazu zweierlei ein:
Erstens ist es bei einem solchen Mammutprojekt wichtig, dass es diese Experten gibt, die den Überblick haben und es schaffen, das Wissen weiterzugeben, das zu diesem Erfolg geführt hat. Es bedarf dazu ja nicht nur der fachlichen Expertise, sondern auch des Willens und der Fähigkeit, sich verständlich auszudrücken, um all das für die nachfolgenden Generationen von Gruppentheoretikern und für alle Anwender der Klassifikation zu erhalten.
Zweitens stellt sich dann sofort die Sinnfrage, und so schließt sich der Kreis:
Warum soll man sich noch mit endlichen einfachen Gruppen beschäftigen? Reicht es nicht, dass der Klassifikationssatz (irgendwann mal in verständlicher Form) bewiesen ist und man ihn anwenden kann? Ja, es gibt noch viele Fragen, die man leider nur durch Abprüfen der Liste beantworten kann und nicht, indem man wirklich die zugrundeliegenden Eigenschaften der Gruppen versteht. Aber wen stört das eigentlich?

Genau hier ordnet sich mein Hauptforschungsinteresse ein. Ich werde vielleicht nie zu denen gehören, die alle Methoden im Beweis des Klassifikationssatzes genau verstehen, und vielleicht auch nicht zu denen, die bei den Anwendungen immer gleich den großen Überblick haben. Aber ich möchte gemeinsam mit meinen Kolleginnen und Kollegen einen Beitrag leisten, dass das Wissen um die Theorie, die all das möglich gemacht hat, nicht verlorengeht, sondern sich vergrößert. Ich möchte die Methoden im Rahmen meiner Projekte weiter verfeinern, dabei neues Zusammenwirken erkunden und damit auch dazu beitragen, dass sich die Darstellung des Beweises des Klassifikationssatzes in den folgenden Jahrzehnten weiter klärt und verbessert. Die noch offenen Fragen möchte ich vor dem Hintergrund untersuchen, dass wir die endlichen einfachen Gruppen *an sich* besser verstehen wollen – dort, wo wir dazu imstande sind. Es sind faszinierende Objekte, die uns immer noch viele Rätsel aufgeben und die wir nicht nur als Liste von Möglichkeiten sehen sollten. Meine Faszination für die Schönheit dieser Theorie möchte ich weitergeben – auch an die, die eher an der Anwendbarkeit interessiert sind. So muss man für manche Anwendungen gar nicht mit der vollen Stärke der Klassifikation „zuschlagen“, sondern kommt bei genauerem Hinsehen mit einem Teilergebnis aus. Und wer, wenn nicht ein Gruppentheoretiker, soll diese Details verstehen und damit Experte für den klugen und effizienten Einsatz der Resultate sein? Wer soll die Brücke schlagen zu Anwendern nicht nur innerhalb der Mathematik, sondern zum Beispiel aus Physik, Chemie, ... ?