
MARTIN–LUTHER–UNIVERSITÄT
HALLE–WITTENBERG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK



Festschrift zum 75. Geburtstag
von Prof. Dr. Alfred Göpfert

Andreas Löhne, Thomas Riedrich and
Christiane Tammer

Report No. 07 (2009)

Editors:

Professors of the Institute for Mathematics, Martin-Luther-University Halle-Wittenberg.

Electronic version: see <http://www2.mathematik.uni-halle.de/institut/reports/>

**Festschrift zum 75. Geburtstag
von Prof. Dr. Alfred Göpfert**

**Andreas Löhne, Thomas Riedrich and
Christiane Tammer**

Report No. 07 (2009)

Andreas Löhne
Christiane Tammer
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Naturwissenschaftliche Fakultät III
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
D-06120 Halle/Saale, Germany
Email: andreas.loehne@mathematik.uni-halle.de
Email: christiane.tammer@mathematik.uni-halle.de

Thomas Riedrich
Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik
D-01062 Dresden

Festschrift zum 75. Geburtstag von Prof. Dr. Alfred Göpfert

Es ist eine große Freude für uns, diese Beiträge unserem Lehrer, Mentor, Kollegen und Freund Alfred Göpfert anlässlich seines 75. Geburtstages zu widmen.

Prof. Dr. habil. Alfred Göpfert begann seine wissenschaftliche Laufbahn in den sechziger Jahren als Doktorand in der Arbeitsgruppe von Prof. Herbert Beckert an der Universität Leipzig. Hier beschäftigte er sich mit Problemstellungen aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere mit approximativen Methoden bei der Behandlung von Rand- und Eigenwertproblemen. Gleichzeitig entwickelte er ein großes Interesse an Fragestellungen der Konvexen Analysis und der Optimierungstheorie. Im Jahr 1974 wurde Alfred Göpfert Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg. Hier baute er eine Forschungsgruppe auf, in der international viel beachtete Resultate auf den Gebieten der Optimierungstheorie in allgemeinen Räumen und der Funktionalanalysis entwickelt wurden. Professor Göpfert leitete diese Arbeitsgruppe sehr erfolgreich, betreute und förderte eine große Anzahl von Diplomarbeiten, Promotionen und Habilitationen. Von 1992 bis 1999 war Alfred Göpfert als Professor für Konvexe Analysis und Optimierung an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg tätig, bevor er 1999 emeritiert wurde, aber keineswegs in den Ruhestand ging. Von seinem breiten und umfassenden Wissen, seiner Ausstrahlung und seinen Anregungen profitierten Studenten und Kollegen der Universitäten in Leipzig, Halle und der Technischen Hochschule Merseburg.

Die Resultate seiner Forschungsarbeiten stellte Alfred Göpfert auf vielen internationalen Konferenzen und in Veröffentlichungen in anerkannten Fachzeitschriften sowie in Büchern vor. Damit gab er Anstöße für neue Forschungsrichtungen, insbesondere auf den Gebieten der Optimierung in allgemeinen Räumen und der funktionalanalytischen Grundlagen der Optimierung. Durch sein Buch *Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen* (1973) erhielten viele Wissenschaftler Impulse für ihre Forschungsarbeit. Das Lehrbuch zur *Funktionalanalysis* (gemeinsam mit Thomas Riedrich) half Studenten und Wissenschaftlern, einen Einstieg in dieses Gebiet zu finden. Ebenso stellen das gemeinsam mit Reinhard Nehse veröffentlichte Buch *Vektoroptimierung Theorie, Verfahren und Anwendungen* (1990) und das *Lexikon der Optimierung* wichtige Beiträge zur Forschung auf dem Gebiet der Optimierung dar. Im Jahr 2003 erschien die von Alfred Göpfert und Koautoren verfasste Monographie *Variational Methods in Partially Ordered Spaces* beim Springer-Verlag und im März 2009 das Lehrbuch *Angewandte Funktionalanalysis* beim Verlag Vieweg+Teubner.

Wir schätzen Alfred Göpfert als ausgezeichneten akademischen Lehrer, der wesentlich zur Entwicklung der Optimierungstheorie am Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg beigetragen hat. Mit seinen Anregungen unterstützte uns Prof. Göpfert in seiner stets hilfsbereiten Art sehr bei unserer wissenschaftlichen Arbeit. Die Kollegen, die die Freude haben, mit ihm zusammenarbeiten zu können, profitieren von seiner Fähigkeit, interessante Beziehungen zwischen unterschiedlichen Gebieten der Mathematik herzustellen. Für das Verfassen wichtiger Arbeiten mit einer außerordentlich großen

Anzahl von Koautoren waren die besondere Genauigkeit im Detail und die Fähigkeit von Alfred Göpfert, wesentliche Zusammenhänge zu erkennen, prägend. Die Diskussionen mit ihm wecken immer wieder Neugier auf interessante mathematische Fragestellungen.

Seine Tätigkeit als Wissenschaftler war immer verbunden mit einem Engagement in akademischen Gremien, Kommissionen und Verbänden. So hat er, um nur ein Beispiel zu nennen, als Vorsitzender des Landesverbandes Sachsen-Anhalt des Deutschen Hochschulverbandes großen Einfluss auf die Hochschulpolitik genommen.

Wir, seine Schüler und Kollegen, sind ihm für seine Anregungen, seine Unterstützung, Hilfe und Herzlichkeit sehr dankbar.

Christiane Tammer, Thomas Riedrich und Andreas Löhne

Inhaltsverzeichnis

On the Solution of Marginal-Sum Equations

Siegfried Dietze, Thomas Riedrich, Klaus D. Schmidt

1

Lagrange Duality in Vector Optimization – An Approach Based on Self-infimal Sets

Andreas Löhne, Christiane Tammer

17

Skalarisierungsfunktionale und deren Anwendungen

Christiane Tammer

35

On the Solution of Marginal–Sum Equations

By Siegfried Dietze, Thomas Riedrich and Klaus D. Schmidt

Fachrichtung Mathematik
Technische Universität Dresden

Abstract

In motor car insurance, the risks of a portfolio usually are grouped according to the realizations of two (or more) risk characteristics and it is assumed that, for every group, the expected average claim amount can be represented as a product of parameters representing the realizations of the risk characteristics. This model leads, in a natural way, to the problem of marginal–sum estimation and hence to the problem of solving marginal–sum equations. Under the assumption that at least one observation is available in every group, we show that a solution of the marginal–sum equations exists, that it is radially unique, and that it can be obtained by iteration with an arbitrary initial value.

1 Introduction

In motor car insurance, the risks of a portfolio usually are grouped according to the realizations of two or more risk characteristics.

In the case of two risk characteristics, it is assumed that, for every group, the *claim number* $N_{i,k}$ and the *aggregate claim amount* $S_{i,k}$ are related by the model equations

$$E\left[\frac{S_{i,k}}{N_{i,k}}\right] = \mu \alpha_i \beta_k$$

where μ is a scale parameter and the parameters α_i and β_k with $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$ refer to the realizations of the risk characteristics.

Since expectations of quotients are difficult to handle in general, it is convenient to replace expectations of quotients by quotients of expectations and hence to replace the previous model equations by the equations

$$\mu \alpha_i \beta_k E[N_{i,k}] = E[S_{i,k}]$$

Summation yields

$$\sum_{l=1}^K \mu \alpha_i \beta_l E[N_{i,l}] = \sum_{l=1}^K E[S_{i,l}] \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^I \mu \alpha_j \beta_k E[N_{j,k}] = \sum_{j=1}^I E[S_{j,k}]$$

with $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$. Replacing all parameters and expectations in these equations by random variables, we obtain the *marginal-sum equations*

$$\sum_{l=1}^K \hat{\mu} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_l N_{i,l} = \sum_{l=1}^K S_{i,l} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^I \hat{\mu} \hat{\alpha}_j \hat{\beta}_k N_{j,k} = \sum_{j=1}^I S_{j,k}$$

with $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$. We say that random variables $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_I, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_K$ are *marginal-sum estimators* of the parameters $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_K$ if they solve the marginal-sum equations.

Although it seems to be unknown until now whether or not marginal-sum estimators exist, their existence is usually taken as granted and iteration methods are used to determine approximations. The present paper is intended as a first but essential step to close this gap.

In spite of the probabilistic model justifying marginal-sum estimation, the problem of the existence of marginal-sum estimators is essentially non-probabilistic. We thus propose a deterministic approach to the solution of the marginal equations (Section 2) and relate this problem to a fixed point problem (Section 3). Under the assumption that all claim numbers are strictly positive and that the right hand side of each of the marginal-sum equations is strictly positive as well, we show that the marginal-sum equations have a solution (Section 4) which is radially unique (in a sense to be made precise) and can be obtained by iteration (Section 5). We conclude with some remarks on impossible and possible extensions of our results (Section 6) and on marginal-sum estimation in loss reserving (Section 7).

2 The Marginal-Sum Equations

Throughout this paper, we consider two matrices $\mathbf{N}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+^K$ having the property that every row vector and every column vector of each of $\mathbf{N}$ and $\mathbf{S}$ has at least one coordinate which is nonzero; this means that $\mathbf{e}_i' \mathbf{N} \mathbf{1}, \mathbf{1}' \mathbf{N} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i' \mathbf{S} \mathbf{1}, \mathbf{1}' \mathbf{S} \mathbf{e}_k > 0$ holds for all $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$ (where $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^I$ and $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^K$ are unit vectors and $\mathbf{1}$ is a vector of suitable dimension with all coordinates being equal to 1). The assumption on the matrix $\mathbf{N}$ will be strengthened in Sections 4 and 5 below.

We are interested in solutions $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in (0, \infty) \times (0, \infty)^I \times (0, \infty)^K$ of the *marginal-sum equations*

$$\sum_{l=1}^K \mu \alpha_i \beta_l N_{i,l} = \sum_{l=1}^K S_{i,l} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^I \mu \alpha_j \beta_k N_{j,k} = \sum_{j=1}^I S_{j,k}$$

with $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$.

The marginal–sum equations have either no solution or infinitely many solutions: Indeed, if $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ is a solution, then $(1, \mu\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ and $(1, \boldsymbol{\alpha}, \mu\boldsymbol{\beta})$ are solutions as well; more generally, if $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ is a solution and if $c, d \neq 0$, then $((cd)^{-1}\mu, c\boldsymbol{\alpha}, d\boldsymbol{\beta})$ is a solution as well.

The parameter μ is obviously of minor interest: Indeed, if $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ is a solution of the marginal equations, then

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^I \sum_{l=1}^K S_{j,l}}{\sum_{j=1}^I \sum_{l=1}^K \alpha_j N_{j,l} \beta_l}$$

This shows that the parameter μ is nothing else than a scaling parameter which permits any scaling of the parameters $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ by a strictly positive factor. For example, the parameters $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ may be scaled by the requirement that either

$$\mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha} = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{1}'\boldsymbol{\beta} = 1$$

or

$$\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j = 1 \quad \text{and} \quad \max_{l \in \{1, \dots, K\}} \beta_l = 1$$

Scaling the parameters $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ may be of substantial interest in actuarial practice.

Because of the preceding discussion, we now simplify the terminology by saying that the pair $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in (0, \infty)^I \times (0, \infty)^K$ is a *solution* of the marginal–sum equations if there exists some $\mu \in (0, \infty)$ such that the triplet $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ is a solution of the marginal–sum equations; in that case, we have

$$\mu = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{N}\boldsymbol{\beta}}$$

We also say that the marginal–sum equations have a *radially unique solution* if they have a solution $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ and if every solution $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ satisfies

$$\boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{\alpha}^* \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\beta}^*$$

for some $c, d \in (0, \infty)$.

Under the rather restrictive assumption that all coordinates of the matrix $\mathbf{N}$ are identical, it is easily seen that the marginal–sum equation have a radially unique solution and that the solutions can be given in closed form:

2.1 Example. Assume that $N_{i,k} = \nu$ holds for some $\nu \in (0, \infty)$ and for all $i \in \{1, \dots, I\}$ and all $k \in \{1, \dots, K\}$. Then the marginal–sum equations can be written as

$$\mu\nu\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{S}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\beta}} \quad \text{and} \quad \mu\nu\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{S}'\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha}}$$

Thus, letting

$$\boldsymbol{\alpha}^* := \frac{\mathbf{S}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\beta}^* := \frac{\mathbf{S}'\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}}$$

we see that $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ is a solution of the marginal equations (with $\mu^* = \mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}/\nu$) which satisfies

$$\mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha}^* = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{1}'\boldsymbol{\beta}^* = 1$$

Moreover, every solution $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ of the marginal equations satisfies

$$\boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{\alpha}^* \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\beta}^*$$

for some $c, d \in (0, \infty)$ such that the marginal–sum equations have a radially unique solution.

In the general case, however, the existence and the radial uniqueness of solution of the marginal–sum equations are far from being evident.

3 Equivalent Fixed Point Problems

The marginal–sum equations may be expressed in terms of nonlinear maps:

Define first $\mathbf{G} : (0, \infty)^I \rightarrow (0, \infty)^K$ and $\mathbf{H} : (0, \infty)^K \rightarrow (0, \infty)^I$ coordinatewise by letting

$$G_k(\boldsymbol{\alpha}) := \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{e}_k}{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{N}\mathbf{e}_k} \quad \text{and} \quad H_i(\boldsymbol{\beta}) := \frac{\mathbf{e}_i'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\mathbf{e}_i'\mathbf{N}\boldsymbol{\beta}}$$

Then a pair $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in (0, \infty)^I \times (0, \infty)^K$ is a solution of the marginal–sum equations if and only if there exists some $\mu \in (0, \infty)$ such that

$$\mu\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) \quad \text{and} \quad \mu\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$$

In that case, we have

$$\mu = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{N}\boldsymbol{\beta}}$$

The following lemma is obvious:

3.1 Lemma. *Each of the maps $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ is*

- (i) *homogeneous of degree -1 ,*
- (ii) *monotone decreasing, and*
- (iii) *continuous.*

Here and in the sequel, inequalities between vectors, order intervals, and monotonicity of maps refer to the coordinatewise order relation on the Euclidean space.

Define now $\Phi : (0, \infty)^I \rightarrow (0, \infty)^I$ and $\Psi : (0, \infty)^K \rightarrow (0, \infty)^K$ by letting

$$\Phi := \mathbf{H} \circ \mathbf{G} \quad \text{and} \quad \Psi := \mathbf{G} \circ \mathbf{H}$$

The following lemma records some basic properties of Φ and Ψ which are evident from the definitions and Lemma 3.1:

3.2 Lemma. *Each of the maps Φ and Ψ is*

- (i) *homogeneous of degree 1,*
- (ii) *monotone increasing, and*
- (iii) *continuous.*

Moreover, the maps Φ and Ψ satisfy $\mathbf{G} \circ \Phi = \Psi \circ \mathbf{G}$ and $\Phi \circ \mathbf{H} = \mathbf{H} \circ \Psi$.

The following result relates the solutions of the marginal-equations and the fixed points of Φ and Ψ to each other:

3.3 Theorem.

- (1) *If (α, β) is a solution of the marginal equations, then α is a fixed point of Φ and β is a fixed point of Ψ .*
- (2) *If α is a fixed point of Φ , then $\mathbf{G}(\alpha)$ is a fixed point of Ψ and $(\alpha, \mathbf{G}(\alpha))$ is a solution of the marginal equations.*
- (3) *If β is a fixed point of Ψ , then $\mathbf{H}(\beta)$ is a fixed point of Φ and $(\mathbf{H}(\beta), \beta)$ is a solution of the marginal equations.*

Proof. Assume first that (α, β) is a solution of the marginal equations and define

$$\mu := \frac{\mathbf{1}' \mathbf{S} \mathbf{1}}{\alpha' \mathbf{N} \beta}$$

Lemma 3.1 yields

$$\begin{aligned} \mu \alpha &= \mathbf{H}(\beta) \\ &= \mathbf{H}(\mu^{-1} \mathbf{G}(\alpha)) \\ &= \mu \mathbf{H}(\mathbf{G}(\alpha)) \\ &= \mu \Phi(\alpha) \end{aligned}$$

and hence

$$\alpha = \Phi(\alpha)$$

By symmetry, we obtain

$$\beta = \Psi(\beta)$$

This proves (1).

Assume now that α is a fixed point of Φ . Then we have

$$\Phi(\alpha) = \alpha$$

and Lemma 3.2 yields

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{G}(\alpha)) &= \mathbf{G}(\Phi(\alpha)) \\ &= \mathbf{G}(\alpha)\end{aligned}$$

which means that $\mathbf{G}(\alpha)$ is a fixed point of Ψ . Furthermore, letting

$$\beta := \mathbf{G}(\alpha)$$

we obtain

$$\begin{aligned}\alpha &= \Phi(\alpha) \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{G}(\alpha)) \\ &= \mathbf{H}(\beta)\end{aligned}$$

which means that (α, β) is a solution of the marginal-sum equations (with $\mu = 1$). This proves (2), and (3) follows by symmetry. $\square$

We say that a map $\Gamma : (0, \infty)^d \rightarrow (0, \infty)^d$ has a *radially unique fixed point* if Γ has a fixed point $\mathbf{z}^*$ and if every fixed point $\mathbf{z}$ of Γ satisfies

$$\mathbf{z} = c \mathbf{z}^*$$

for some $c \in (0, \infty)$.

3.4 Theorem. *The following are equivalent:*

- (a) *The marginal-sum equations have a radially unique solution.*
- (b) *The map Φ has a radially unique fixed point.*
- (c) *The map Ψ has a radially unique fixed point.*

Proof. Assume first that the marginal-sum equations have a radially unique solution (α^*, β^*) and consider any fixed point α of Φ . By Theorem 3.3, $(\alpha, \mathbf{G}(\alpha))$ is a solution of the marginal-sum equations and it now follows that there exists some $c \in (0, \infty)$ such that

$$\alpha = c \alpha^*$$

Therefore, (a) implies (b), and it follows by symmetry that (a) implies (c).

Assume now that Φ has a radially unique fixed point α^* and consider any fixed point β of Ψ . By Theorem 3.3,

$$\beta^* := \mathbf{G}(\alpha^*)$$

is a fixed point of Ψ and $\mathbf{H}(\beta)$ is a fixed point of Φ . It now follows that there exists some $c \in (0, \infty)$ such that

$$\mathbf{H}(\beta) = c\alpha^*$$

and we obtain

$$\begin{aligned}\beta &= \Psi(\beta) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{H}(\beta)) \\ &= \mathbf{G}(c\alpha^*) \\ &= c^{-1}\mathbf{G}(\alpha^*) \\ &= c^{-1}\beta^*\end{aligned}$$

Therefore, (b) implies (c), and it follows by symmetry that (c) implies (b).

Assume finally that Φ has a radially unique fixed point α^* and consider any solution (α, β) of the marginal–sum equations. By Theorem 3.3, α is a fixed point of Φ and β is a fixed point of Ψ . By what we have shown before, we know that also Ψ has a radially unique fixed point β^* . It now follows that there exist some $c, d \in (0, \infty)$ such that

$$\alpha = c\alpha^* \quad \text{and} \quad \beta = d\beta^*$$

Therefore, (b) implies (a), and it follows by symmetry that (c) implies (a). $\square$

4 Existence of a Fixed Point of Φ

In the present section, we assume that all coordinates of $\mathbf{N}$ are strictly positive; this means that $\mathbf{e}'_i \mathbf{N} \mathbf{e}_k > 0$ holds for all $i \in \{1, \dots, I\}$ and $k \in \{1, \dots, K\}$

Define $\overline{\mathbf{G}} : \mathbb{R}_+^I \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, \infty)^K$ and $\overline{\mathbf{H}} : \mathbb{R}_+^K \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, \infty)^I$ coordinatewise by letting

$$\overline{G}_k(\alpha) := \frac{\mathbf{1}' \mathbf{S} \mathbf{e}_k}{\alpha' \mathbf{N} \mathbf{e}_k} \quad \text{and} \quad \overline{H}_i(\beta) := \frac{\mathbf{e}'_i \mathbf{S} \mathbf{1}}{\mathbf{e}'_i \mathbf{N} \beta}$$

(where $\mathbf{0}$ is a vector of suitable dimension with all coordinates being equal to 0) and define $\overline{\Phi} : \mathbb{R}_+^I \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, \infty)^I$ and $\overline{\Psi} : \mathbb{R}_+^K \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, \infty)^K$ by letting

$$\overline{\Phi} := \overline{\mathbf{H}} \circ \overline{\mathbf{G}} \quad \text{and} \quad \overline{\Psi} := \overline{\mathbf{G}} \circ \overline{\mathbf{H}}$$

Then $\overline{\Phi}$ extends Φ , and $\overline{\Psi}$ extends Ψ . By symmetry, it is sufficient to study the properties of $\overline{\Phi}$.

We can now prove the existence of a fixed point of Φ :

4.1 Theorem. *The map Φ has a fixed point.*

Proof. Let

$$\Delta^I := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^I \mid \mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha} = 1\}$$

and define $\tilde{\Phi} : \Delta^I \rightarrow \Delta^I$ by letting

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{1 + \mathbf{1}'\bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha})} \left(\boldsymbol{\alpha} + \bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) \right)$$

Then the set Δ^I is nonempty, convex and compact, and the map $\tilde{\Phi}$ is continuous since $\bar{\Phi}$ is continuous. It now follows from Brouwer's Fixed Point Theorem that $\tilde{\Phi}$ has a fixed point; see e. g. Granas and Dugundji [2003; Theorems 7.1 and 7.2].

Assume now that $\boldsymbol{\alpha}$ is a fixed point of $\tilde{\Phi}$. Then we have $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ and hence

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda \boldsymbol{\alpha}$$

with $\lambda := \mathbf{1}'\bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha})$. For all $i \in \{1, \dots, I\}$, we thus have $\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda \alpha_i$ and hence

$$\sum_{l=1}^K S_{i,l} = \lambda \alpha_i \sum_{l=1}^K N_{i,l} \frac{\sum_{j=1}^I S_{j,l}}{\sum_{j=1}^I \alpha_j N_{j,l}}$$

Summation yields $\sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^K S_{i,l} = \lambda \sum_{l=1}^K \sum_{j=1}^I S_{j,l}$ and hence $\lambda = 1$. We thus obtain

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$$

which means that $\boldsymbol{\alpha}$ is also a fixed point of $\bar{\Phi}$. Since $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) \in (0, \infty)^I$, we see that $\boldsymbol{\alpha}$ is even a fixed point of Φ . $\square$

It now follows from Theorems 4.1 and 3.3 that the marginal-sum equations have a solution whenever all entries of the matrix $\mathbf{N}$ are strictly positive.

5 Convergence of Iterates and Radial Uniqueness of the Fixed Points of Φ

As in the previous section, we assume that all coordinates of $\mathbf{N}$ are strictly positive and we consider only the map Φ .

5.1 Lemma. *Every coordinate of Φ is partially differentiable. Moreover, for every interval $[\mathbf{u}, \mathbf{z}] \subseteq (0, \infty)^I$, there exists some $\gamma \in (0, \infty)$ such that*

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}) \geq \gamma$$

holds for all $i, j \in \{1, \dots, I\}$ and $\mathbf{t} \in [\mathbf{u}, \mathbf{z}]$.

Proof. For $i, j \in \{1, \dots, I\}$, define $U_i, Z_{i,j} : (0, \infty)^I \rightarrow (0, \infty)$ by letting

$$U_i(\mathbf{t}) := \frac{\sum_{l=1}^K S_{i,l}}{\left(\sum_{l=1}^K N_{i,l} \frac{\sum_{h=1}^I S_{h,l}}{\sum_{h=1}^I t_h N_{h,l}} \right)^2}$$

and

$$Z_{i,j}(\mathbf{t}) := \sum_{l=1}^K N_{i,l} N_{j,l} \frac{\sum_{h=1}^I S_{h,l}}{\left(\sum_{h=1}^I t_h N_{h,l} \right)^2}$$

Then U_i is monotone increasing and $Z_{i,j}$ is monotone decreasing, and we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}) &= U_i(\mathbf{t}) Z_{i,j}(\mathbf{t}) \\ &\geq U_i(\mathbf{u}) Z_{i,j}(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

for all $\mathbf{t} \in [\mathbf{u}, \mathbf{z}]$. Letting $\gamma := \min_{i,j \in \{1, \dots, I\}} U_i(\mathbf{u}) Z_{i,j}(\mathbf{z})$ yields the assertion. $\square$

By Theorem 4.1, the map Φ has a fixed point. Using Lemma 5.1, we can now prove the following result on the convergence of the iterates under Φ of an arbitrary vector in the domain of Φ :

5.2 Theorem. *Let α be a fixed point of Φ . Then, for every $\mathbf{x} \in (0, \infty)^I$, there exists some $\xi \in (0, \infty)$ such that the sequence $\{\Phi^n(\mathbf{x})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converges to $\xi \alpha$.*

Proof. For all $n \in \mathbb{N}_0$, define

$$\mathbf{x}^{(n)} := \Phi^n(\mathbf{x})$$

as well as

$$\mathbf{u}^{(n)} := \lambda^{(n)} \alpha \quad \text{and} \quad \mathbf{z}^{(n)} := \mu^{(n)} \alpha$$

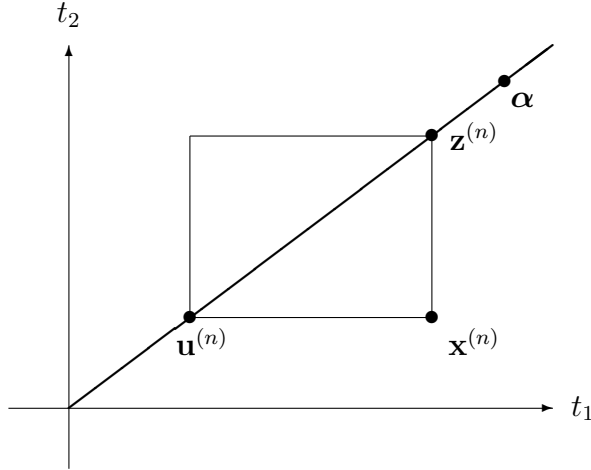
with

$$\lambda^{(n)} := \min_{i \in \{1, \dots, I\}} \frac{x_i^{(n)}}{\alpha_i} \quad \text{and} \quad \mu^{(n)} := \max_{i \in \{1, \dots, I\}} \frac{x_i^{(n)}}{\alpha_i}$$

Then we have

$$\mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{z}^{(n)}$$

This construction is illustrated by the following picture:



Since $\mathbf{u}^{(n)}$ and $\mathbf{z}^{(n)}$ are fixed points of Φ and since Φ is monotone increasing, we obtain $\lambda^{(n)}\alpha = \mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n+1)} \leq \mathbf{z}^{(n)} = \mu^{(n)}\alpha$ and hence

$$\lambda^{(n)} \leq \lambda^{(n+1)} \leq \mu^{(n+1)} \leq \mu^{(n)}$$

Therefore, there exist some $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ satisfying

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} \quad \text{and} \quad \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)}$$

as well as

$$\lambda \leq \mu$$

We shall now prove that $\lambda = \mu$.

– Assume first that $\lambda^{(m)} = \mu^{(m)}$ holds for some $m \in \mathbb{N}_0$. Then we have

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{(m)} \\ &= \mu^{(m)} \\ &= \mu \end{aligned}$$

– Assume now that $\lambda^{(n)} < \mu^{(n)}$ holds for all $n \in \mathbb{N}_0$. For all $n \in \mathbb{N}_0$, define

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(n)} &:= \mathbf{u}^{(n)} + \left(\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}\right) \alpha_{i(n)} \mathbf{e}_{i(n)} \\ \mathbf{y}^{(n)} &:= \mathbf{z}^{(n)} + \left(\lambda^{(n)} - \mu^{(n)}\right) \alpha_{j(n)} \mathbf{e}_{j(n)} \end{aligned}$$

where $i(n), j(n) \in \{1, \dots, I\}$ satisfy

$$\frac{x_{j(n)}^{(n)}}{\alpha_{j(n)}} = \lambda^{(n)} \quad \text{and} \quad \frac{x_{i(n)}^{(n)}}{\alpha_{i(n)}} = \mu^{(n)}$$

Then we have

$$\mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{v}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{y}^{(n)} \leq \mathbf{z}^{(n)}$$

Define

$$\gamma := \min_{i,j \in \{1, \dots, I\}} \inf_{\mathbf{t} \in [\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{z}^{(0)}]} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(\mathbf{t})$$

By Lemma 5.1, we have $\gamma \in (0, \infty)$.

Since $\mathbf{z}^{(n)}$ is a fixed point of Φ and since Φ is monotone increasing, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+1)} &= \Phi(\mathbf{z}^{(n)}) - \Phi(\mathbf{x}^{(n)}) \\ &\geq \Phi(\mathbf{z}^{(n)}) - \Phi(\mathbf{y}^{(n)}) \end{aligned}$$

Now, for every $i \in \{1, \dots, I\}$, the mean value theorem yields the existence of some $\mathbf{t}^{(n,i)} \in [\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{z}^{(n)}] \subseteq [\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{z}^{(0)}]$ such that

$$\begin{aligned} z_i^{(n)} - x_i^{(n+1)} &\geq \Phi_i(\mathbf{z}^{(n)}) - \Phi_i(\mathbf{y}^{(n)}) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_{j(n)}}(\mathbf{t}^{(n,i)}) \right) (z_{j(n)}^{(n)} - y_{j(n)}^{(n)}) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_{j(n)}}(\mathbf{t}^{(n,i)}) \right) (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \alpha_{j(n)} \\ &\geq \gamma (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j \end{aligned}$$

Repeating the argument yields

$$x_i^{(n+1)} - u_i^{(n)} \geq \gamma (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j$$

for all $i \in \{1, \dots, I\}$. We thus obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(n+1)} &= \mu^{(n+1)} \boldsymbol{\alpha} \\ &= \frac{x_{i(n+1)}^{(n+1)}}{\alpha_{i(n+1)}} \boldsymbol{\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{i(n+1)}} \left(z_{i(n+1)}^{(n)} - \gamma (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j \right) \boldsymbol{\alpha} \\ &\leq \left(\mu^{(n)} - \gamma (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \frac{\min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j}{\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j} \right) \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

as well as

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \geq \left(\lambda^{(n)} + \gamma (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \frac{\min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j}{\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j} \right) \boldsymbol{\alpha}$$

Combining these two inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} (\mu^{(n+1)} - \lambda^{(n+1)}) \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{z}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n+1)} \\ &\leq (\mu^{(n)} - \lambda^{(n)}) \left(1 - 2\gamma \frac{\min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j}{\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j} \right) \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

and hence

$$0 \leq \mu^{(n+1)} - \lambda^{(n+1)} \leq \left(\mu^{(n)} - \lambda^{(n)} \right) \left(1 - 2\gamma \frac{\min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j}{\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j} \right)$$

for all $n \in \mathbb{N}_0$. Since $\gamma \in (0, \infty)$, we have

$$1 - 2\gamma \frac{\min_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j}{\max_{j \in \{1, \dots, I\}} \alpha_j} < 1$$

and it follows that

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Therefore, we have in both cases $\lambda = \mu$ and this yields

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(n)} &= \lambda \boldsymbol{\alpha} \\ &= \mu \boldsymbol{\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}^{(n)} \end{aligned}$$

Since $\mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{z}^{(n)}$, it follows that the sequence $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converges to the fixed point $\lambda \boldsymbol{\alpha} = \mu \boldsymbol{\alpha}$ of Φ . $\square$

As an immediate consequence of the previous result, we obtain the radial uniqueness of the fixed points of Φ :

5.3 Theorem. *The map Φ has a radially unique fixed point.*

It now follows from Theorems 5.3 and 3.4 that the marginal-sum equations have a radially unique solution whenever all coordinates of the matrix $\mathbf{N}$ are strictly positive.

The proof of Theorem 5.2 uses a method presented in Morishima [1964; Appendix, Section 2] for the solution of a nonlinear eigenvalue problem. An alternative proof could be given by using Krasnoselskii [1964; Theorems 5.5 and 5.6]. The radial uniqueness of fixed points, which in present paper is obtained as a consequence of Theorem 5.2, could also be obtained from results in Morishima [1964; Appendix, Section 2].

6 Possible Extensions

Since the data represented by the matrices $\mathbf{N}$ and $\mathbf{S}$ are realizations of random matrices, it may happen that at least one class $(i, k) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, K\}$ contains no observations such that the number of claims $N_{i,k}$ and hence also the aggregate claim size $S_{i,k}$ is equal to zero.

The following example shows that missing observations may cause a serious problem:

6.1 Example. Let

$$\mathbf{N} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Then the marginal-sum equations become

$$\begin{aligned} 2\mu\alpha_1\beta_1 &= 1 \\ 3\mu\alpha_2\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2 &= 4 \\ 2\mu\beta_1\alpha_1 + 3\mu\beta_1\alpha_2 &= 1 \\ \mu\beta_2\alpha_2 &= 4 \end{aligned}$$

and the map $\Phi : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)^2$ satisfies

$$\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2/(2\alpha_1 + 3\alpha_2)} \\ \frac{4}{3/(2\alpha_1 + 3\alpha_2) + 4/\alpha_2} \end{pmatrix}$$

Iteration with the initial value $\mathbf{x} := (1/2) \mathbf{1}$ yields the following scaled values of the iterates:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
0	0.5	0.5
1	0.742	0.258
10	0.952	0.048
100	0.995	0.005
1000	0.999	0.001
10000	1.000	0.000

One is thus tempted to conclude that Φ has the fixed point $\mathbf{e}_1$ and that the pair $(\mathbf{e}_1, \Phi(\mathbf{e}_1))$ is a solution of the marginal-sum equations. Unfortunately, however, $\Phi(\mathbf{e}_1)$ is not defined; moreover, and this is even worse, the marginal-sum equations do not have a solution at all.

(In view of Theorem 3.3, the fact that the marginal-sum equations have no solution is in accordance with the fact that the map Φ has no fixed point. Also, convergence of the iterates of $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ to $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}_+^2$ is in accordance with the fact that the map Φ has a continuous extension $\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ which in turn has the radially unique fixed point $\mathbf{e}_1$.)

The previous example shows that thoughtless iteration may lead to useless results.

Because of the previous example, the assumption that all coordinates of the matrix $\mathbf{N}$ are strictly positive cannot be dropped in the results of Sections 4 and 5, but it remains an open question whether or not this assumption can be relaxed.

The marginal–sum equations may also be extended to more than two risk characteristics. For example, in the case of three risk characteristics the marginal–sum equations become

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^M \mu \alpha_i \beta_l \gamma_n N_{i,l,n} &= \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^M S_{i,l,n} \\ \sum_{j=1}^I \sum_{n=1}^M \mu \alpha_j \beta_k \gamma_n N_{j,k,n} &= \sum_{j=1}^I \sum_{n=1}^M S_{j,k,n} \\ \sum_{j=1}^I \sum_{l=1}^K \mu \alpha_j \beta_l \gamma_m N_{j,l,m} &= \sum_{j=1}^I \sum_{l=1}^K S_{j,l,m} \end{aligned}$$

with $i \in \{1, \dots, I\}$, $k \in \{1, \dots, K\}$ and $m \in \{1, \dots, M\}$. In the case of three or more risk characteristics, it is an open question whether the marginal–sum equations have a solution, whether the solution is radially unique, and whether it can be obtained by iteration.

7 Remark

Marginal–sum equations also occur in loss reserving based on run–off triangles. In that case, the data are represented in a triangle instead of a rectangle and it is well–known that the marginal–sum equations have a unique solution which justifies the chain–ladder method; see Mack [1991, 2003], Schmidt and Wünsche [1998], and Radtke and Schmidt [2004].

Acknowledgement

The authors would like to thank Mathias Zocher for a discussion of marginal–sum estimation.

References

- Granas, A., and Dugundji, J. [2003]:** *Fixed Point Theory*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer.
- Krasnoselskii, M. A. [1964]:** *Positive Solutions of Operator Equations*. (Translated from the Russian.) Groningen: Noordhoff.
- Mack, T. [1991]:** *A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves*. ASTIN Bull. **21**, 93–109.
- Mack, T. [2002]:** *Schadenversicherungsmathematik*. 2. Auflage. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.

Morishima, M. [1964]: *Equilibrium, Stability and Growth: A Multisectoral Analysis*. Oxford: Clarendon Press.

Radtke, M., and Schmidt, K. D. [2004]: *Handbuch zur Schadenreservierung*. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.

Schmidt, K. D., and Wünsche, A. [1998]: *Chain-ladder, marginal-sum and maximum-likelihood estimation*. Blätter DGVM **23**, 289–307.

Siegfried Dietze
Thomas Riedrich
Klaus D. Schmidt
Fachrichtung Mathematik
Technische Universität Dresden
D-01062 Dresden

e-mail: `klaus.d.schmidt@tu-dresden.de`

April 17, 2009

Lagrange duality in vector optimization - An approach based on self-infimal sets

Andreas Löhne

Christiane Tammer

Dedicated to Prof. Dr. Alfred Göpfert on the occasion of his 75th birthday

Abstract

In this article a new type of vectorial Lagrange duality is investigated. As the objective space of a given vector optimization problem is embedded into a larger space, in fact, the space of self-infimal subsets of the original vector space, it is possible to work with infimum and supremum in the sense of the greatest lower and least upper bound, respectively. As a consequence, a weak and a strong vectorial Lagrange duality theorem can be formulated very similar to the well-known scalar counterparts.

1 Introduction

It is well known that a maximization problem ($\phi(\lambda) \rightarrow \max$ with supremal value d) can be associated to a given minimization problem ($f(x) \rightarrow \min$ with infimal value p) such that $d \leq p$ and that, under additional assumptions, both problems have the same optimal values. Duality theory has been developed for many problem classes and for very general settings. One of the first contributions to duality theory in general spaces is given in the book [10] by A. Göpfert.

There are at least three reasons to look for useful dual problems: First, the dual problem has (under appropriate assumptions) the same optimal value as the given “primal” optimization problem, but solving the dual problem could be done with other methods of analysis or numerical mathematics. Secondly, an approximate solution of the given minimization problem gives an estimation of the minimal value p from above, whereas an approximate solution of the dual problem is an estimation of p from below, so that one gets intervals that contain p . Moreover, recalling the Lagrange method, saddle points, equilibrium points of two-person games, shadow prices in economics, perturbation methods or dual variational principles, it becomes clear that optimal dual variables often have a special meaning for the given problem.

Of course, the advantages just listed require a skillfully chosen dual program. Nevertheless, the mentioned points are motivation enough, to look for dual problems in vector optimization too. However, it is not easy to derive useful dual problems in vector optimization. In the book by A. Göpfert and R. Nehse [11, Page 64] one can find the following remark on vectorial duality:

“... Die praktische Nutzung ist aber gegenüber der Nutzung der Dualität der skalaren Optimierung noch wenig ausgeprägt. Für die Aufgabenklassen der linearen Vektoroptimierung, der vektoriellen Standortprobleme, der vektoriellen geometrischen Optimierung gibt es anwendungsfähige Dualprobleme, und sie sind nicht komplizierter als die gegebenen Probleme. ...”

This remark can be understood as a motivation to consider new approaches to vectorial duality theory.

As in the scalar duality theory, there are different types, such as conjugate duality, Lagrange duality and others, for instance, axiomatic duality. Lagrange duality theory is an important standard tool in optimization. There are many approaches to a corresponding theory for vector optimization problems, see e.g., the book by Göpfert et al. [12, Section 3.7] as well as the books by Jahn [19, 21] and Luc [27]. See also [34, 5, 38, 6, 7, 18, 33, 35, 28, 9, 13, 29, 37, 4] for a choice of further papers on vectorial duality. The basic idea of Lagrange duality is to assign to a given constrained optimization problem

$$(p) \quad p := \inf_{x \in S} f(x)$$

a Lagrange function $L : X \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ with $\sup_{\lambda} L(x, \lambda) = f(x)$ for $x \in S \subseteq X$ and to consider the closely related pair of mutually dual unconstrained problems

$$\inf_x \sup_{\lambda} L(x, \lambda) \quad \text{and} \quad \sup_{\lambda} \inf_x L(x, \lambda).$$

The dual problem is usually defined as

$$(d) \quad d := \sup_{\lambda} \phi(\lambda),$$

where λ is called the dual variable and $\phi : \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\phi(\lambda) := \inf_x L(x, \lambda)$ is called the dual objective function.

This shows that the concepts of infimum and supremum play an important role in Lagrange duality. The vectorial approaches in the literature are based on an appropriate replacement for these concepts. On the one hand, it is important to have a relationship of the supremum/infimum to the solution concepts and on the other hand the properties of the infimum/supremum (to be a greatest lower / least upper bound) are important for the proofs. We want to speak about a *(complete) lattice structure* in the latter case because a partially ordered set is called a complete lattice if every subset has an infimum and a supremum in the sense of a greatest lower / least upper bound.

One possibility to re-obtain the lattice structure in vector optimization is to scalarize the Lagrange function and to use the usual infimum/supremum in the complete lattice $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. In the most papers mentioned above the direct usage of infimum/supremum is essentially avoided. In other papers the infimum/supremum is hidden, but was not pointed out; see, e.g., [37].

We intend to work even in vector optimization consequently with an appropriate lattice structure. For that reason the image space of the objective function of the vector optimization problem is embedded into a larger space, namely into a subset of the power set of the original image space. Our approach ensures both, the lattice structure of the image space and the possibility to describe solutions of the vectorial problem by the corresponding infimum/supremum. This approach was established by Löhne and Tammer [26], where a conjugate duality theory has been developed. Solution concepts in this framework have been recently defined and investigated by Heyde and Löhne [17]. Earlier works, such as [14, 24, 25, 16], are related but the relationship to vector optimization was not yet pointed out. Hamel developed in [14] and several forthcoming papers a Set-valued Convex Analysis, in particular in [15] also a Lagrange duality theory in this setting. His set-valued approach is closely related to the present one, which is adapted to vector optimization. However, his set-valued approach has the advantage that it can be formulated in a more general framework.

Let us finally mention that Kuroiwa [22] started to consider Lagrange duality by an ordering relation in the power set. He did not, however, focus on the lattice structure.

2 Problem Formulation

Throughout the paper let $C \subsetneq \mathbb{R}^q$ be a pointed (i.e., $C \cap -C = \{0\}$) closed convex cone with nonempty interior. By C° we denote its polar cone, i.e., $C^\circ := \{y^* \in \mathbb{R}^q \mid \forall y \in C : \langle y^*, y \rangle \leq 0\}$. The set of *weakly minimal* points of a subset $A \subseteq \mathbb{R}^q$ (with respect to C) is defined by

$$\text{wMin } A := \{y \in A \mid (\{y\} - \text{int } C) \cap A = \emptyset\},$$

and the set of *minimal points* of A is defined by

$$\text{Min } A := \{y \in A \mid (\{y\} - C \setminus \{0\}) \cap A = \emptyset\}.$$

Let $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ and $S \subseteq \mathbb{R}^n$. We consider the following vector optimization problem:

$$(VOP) \quad \bar{P} := \text{Min } F(S) := \text{Min } \bigcup_{x \in S} \{F(x)\}.$$

A feasible point $\bar{x} \in S$ is called an efficient solution of (VOP) if $F(\bar{x}) \in \text{Min } F(S)$. This can be equivalently expressed as

$$[x \in S, \quad F(x) \leq_C F(\bar{x})] \implies F(x) = F(\bar{x}).$$

Weakly efficient solutions are defined analogously, but we will only consider efficient solutions in this paper. Nevertheless the theory essentially works with weakly minimal points, for instance, the next section is based on this concept.

3 Infimal sets and infimum

We recall in this section the concept of an *infimal set* (resp. *supremal set*), which is due to Nieuwenhuis [30], was extended by Tanino [36], and slightly modified with respect to the elements $\pm\infty$ by Löhne and Tammer [26]. Moreover we recall properties of the space of self-infimal sets, which was shown in [26] to be a complete lattice. As we will show in Section 4, this complete lattice is usefull for the theory of vector optimization.

The *upper closure* (with respect to C) of $A \subseteq \mathbb{R}^q$ is defined (see e.g. [9]) to be the set

$$\text{Cl}_+ A := \{y \in \mathbb{R}^q \mid \{y\} + \text{int } C \subseteq A + \text{int } C\}.$$

It is an easy task to show that for every (not necessarily convex) set $A \subseteq \mathbb{R}^q$ it holds

$$\text{Cl}_+ A = \text{cl}(A + \text{int } C) = \text{cl}(A + C). \quad (1)$$

If $A \neq \emptyset$ we have [30, Th. I-18]

$$\text{wMin Cl}_+ A = \emptyset \iff A + \text{int } C = \mathbb{R}^q \iff \text{Cl}_+ A = \mathbb{R}^q.$$

The definition of the upper closure can be extended for subsets of the space $\overline{\mathbb{R}}^q := \mathbb{R}^q \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. It is possible but not necessary for the present article to introduce calculus rules in $\overline{\mathbb{R}}^q$.

For a subset $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$ we set

$$\text{Cl}_+ A := \begin{cases} \mathbb{R}^q & \text{if } -\infty \in A \\ \{y \in \mathbb{R}^q \mid \{y\} + \text{int } C \subseteq A \setminus \{+\infty\} + \text{int } C\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly, the upper closure of a subset of $\overline{\mathbb{R}}^q$ is always a subset in $\mathbb{R}^q$.

The *infimal set* of $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$ (with respect to C) is defined by

$$\text{Inf } A := \begin{cases} \text{wMin Cl}_+ A & \text{if } \emptyset \neq \text{Cl}_+ A \neq \mathbb{R}^q \\ \{-\infty\} & \text{if } \text{Cl}_+ A = \mathbb{R}^q \\ \{+\infty\} & \text{if } \text{Cl}_+ A = \emptyset. \end{cases}$$

We see that the infimal set of A with respect to C coincides essentially with the set of weakly minimal elements of the set $\text{cl}(A + C)$.

By our conventions, $\text{Inf } A$ is always a nonempty set. Clearly, if $-\infty$ belongs to A , we have $\text{Inf } A = \{-\infty\}$, in particular, $\text{Inf } \{-\infty\} = \{-\infty\}$. Furthermore, it holds $\text{Inf } \emptyset = \text{Inf } \{+\infty\} = \{+\infty\}$ and $\text{Cl}_+ A = \text{Cl}_+(A \cup \{+\infty\})$ and hence $\text{Inf } A = \text{Inf}(A \cup \{+\infty\})$ for all $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$.

The following assertions were proved by Nieuwenhuis [30] and, in an extended form, by Tanino [36].

Proposition 3.1 *For $A, B \subseteq \mathbb{R}^q$ with $\emptyset \neq \text{Cl}_+ A \neq \mathbb{R}^q$ and $\emptyset \neq \text{Cl}_+ B \neq \mathbb{R}^q$ it holds*

$$(i) \text{ Inf } A = \{y \in \mathbb{R}^q \mid y \notin A + \text{int } C, \{y\} + \text{int } C \subseteq A + \text{int } C\},$$

- (ii) $A + \text{int } C = B + \text{int } C \iff \text{Inf } A = \text{Inf } B$,
- (iii) $A + \text{int } C = \text{Inf } A + \text{int } C$,
- (iv) $\text{Cl}_+ A = \text{Inf } A \cup (\text{Inf } A + \text{int } C)$,
- (v) $\text{Inf } A$, $(\text{Inf } A - \text{int } C)$ and $(\text{Inf } A + \text{int } C)$ are disjoint,
- (vi) $\text{Inf } A \cup (\text{Inf } A - \text{int } C) \cup (\text{Inf } A + \text{int } C) = \mathbb{R}^q$.
- (vii) $\text{Inf}(\text{Inf } A + \text{Inf } B) = \text{Inf}(A + B)$,
- (viii) $\alpha \text{Inf } A = \text{Inf}(\alpha A)$ for $\alpha > 0$.

For $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$ it holds

$$(ix) \text{Inf } \text{Inf } A = \text{Inf } A, \text{Cl}_+ \text{Cl}_+ A = \text{Cl}_+ A, \text{Inf } \text{Cl}_+ A = \text{Inf } A, \text{Cl}_+ \text{Inf } A = \text{Cl}_+ A,$$

Proposition 3.2 Let $A_i \in \overline{\mathbb{R}}^q$ for $i \in I$, where I is an arbitrary index set. Then it holds

$$(i) \text{Cl}_+ \bigcup_{i \in I} A_i = \text{Cl}_+ \bigcup_{i \in I} \text{Cl}_+ A_i,$$

$$(ii) \text{Inf} \bigcup_{i \in I} A_i = \text{Inf} \bigcup_{i \in I} \text{Inf } A_i.$$

Proof. (i) As $\text{Cl}_+ \{+\infty\} = \emptyset$ and $\text{Cl}_+ A = \text{Cl}_+(A \setminus \{+\infty\})$ we can assume that $+\infty \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. We also assume $\{-\infty\} \notin \bigcup_{i \in I} A_i$, because the statement is otherwise obvious.

So we have

$$\text{Cl}_+ \bigcup_{i \in I} A_i = \text{cl} \left(\bigcup_{i \in I} A_i + C \right) = \text{cl} \left(\bigcup_{i \in I} \text{cl}(A_i + C) \right) + C = \text{Cl}_+ \bigcup_{i \in I} \text{Cl}_+ A_i.$$

(ii) Follows from (i) and Proposition 3.1 (ix). $\square$

One can define analogously, using the set $\text{wMax } A := -\text{wMin}(-A)$ of weakly maximal elements of $A \subseteq \mathbb{R}^q$, the lower closure $\text{Cl}_- A$ and the set $\text{Sup } A$ of supremal elements of $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$ and there are analogous statements.

Let $\mathcal{I} := \mathcal{I}_C(\overline{\mathbb{R}}^q)$ be the family of all self-infimal subsets of $\overline{\mathbb{R}}^q$, i.e., all sets $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^q$ satisfying

$$\text{Inf } A = A.$$

In $\mathcal{I}$ we introduce an addition $\oplus : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$, a multiplication by nonnegative real numbers $\odot : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ and an order relation $\preceq$ as follows:

$$\begin{aligned} A \oplus B &:= \text{Inf}(\text{Cl}_+ A + \text{Cl}_+ B), \\ \alpha \odot A &:= \text{Inf}(\alpha \cdot \text{Cl}_+ A), \\ A \preceq B &: \iff \text{Cl}_+ A \supseteq \text{Cl}_+ B. \end{aligned}$$

Note that the definition of $\oplus$ implies the so-called *inf-addition* in $\overline{\mathbb{R}}^q$, i.e., $\{-\infty\} \oplus \{+\infty\} = \{+\infty\}$. Moreover it is easy to see that $\oplus$ and $\odot$ are compatible with the ordering, that means, for $A, B, D \in \mathcal{I}$ and $\alpha \in \mathbb{R}_+$ it holds

$$A \preceq B \implies [A \oplus D \preceq B \oplus D \quad \wedge \quad \alpha \odot A \preceq \alpha \odot B].$$

As a consequence of the natural setting $0 \cdot \emptyset = \emptyset$ and $0 \cdot \mathbb{R}^q = \{0\}$, we get $0 \odot \{+\infty\} = \{+\infty\}$ and $0 \odot \{-\infty\} = \{0\}$.

Given a partially ordered set $(Z, \leq)$, we say that $\bar{z} \in Z$ is a *lower bound* of $A \subseteq Z$ if $\bar{z} \leq a$ for all $a \in A$. The element $\bar{z} \in Z$ is called the *infimum* of $A \subseteq Z$ (written $\bar{z} = \inf A$) if $\bar{z}$ is a lower bound of A and for every other lower bound $\hat{z}$ of A it holds $\hat{z} \leq \bar{z}$. As the ordering $\leq$ is antisymmetric, the infimum, if it exists, is uniquely defined. The partially ordered set $(Z, \leq)$ is called a *complete lattice* if every subset of Z has an infimum and a supremum, where the supremum is defined analogously and is denoted by $\sup A$. For more details about complete lattices; see, e.g., [1, 39].

One of the central preliminary results is the following.

Theorem 3.3 ([26]) *The partially ordered set $(\mathcal{I}, \preceq)$ provides a complete lattice. For nonempty sets $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ it holds*

$$\inf \mathcal{A} = \text{Inf} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \quad \sup \mathcal{A} = \text{Sup} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

In every complete lattice the infimum (supremum) of the empty set equals the largest (smallest) element. In our case this means $\inf \emptyset = \{+\infty\}$ and $\sup \emptyset = \{-\infty\}$.

We see in the latter result that the infimum/supremum in $\mathcal{I}$ is closely related to the solution concepts of vector optimization because the infimal/supremal set is closely related to the set of weakly minimal/maximal elements.

We next show some calculus rules.

Proposition 3.4 *For a nonempty subset $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ and an element $B \in \mathcal{I}$ we have*

$$(i) \quad \inf_{A \in \mathcal{A}} (A \oplus B) = B \oplus \inf_{A \in \mathcal{A}} A$$

$$(ii) \quad \sup_{A \in \mathcal{A}} (A \oplus B) \preceq B \oplus \sup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Proof. (i) If $\{+\infty\}$ or $\{-\infty\}$ occurs, the statement follows directly. Otherwise it holds

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A + B) = B + \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

By Proposition 3.1 (vii) we obtain

$$\text{Inf} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A + B) = \text{Inf} \left(B + \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) = B \oplus \text{Inf} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

The conclusion now follows from Theorem 3.3 and Proposition 3.2.

(ii) We have $A \preceq \sup_{A \in \mathcal{A}} A$ and hence $A \oplus B \preceq B \oplus \sup_{A \in \mathcal{A}} A$ for alle $A \in \mathcal{A}$. As $\mathcal{I}$ is a complete lattice we can take the supremum on the left-hand side of the inequality. This yields (ii). $\square$

Proposition 3.5 *For nonempty subsets $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ we have*

$$(i) \inf \{A \oplus B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} = \inf \mathcal{A} \oplus \inf \mathcal{B},$$

$$(ii) \sup \{A \oplus B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \preceq \sup \mathcal{A} \oplus \sup \mathcal{B}.$$

Proof. (i) The element $\{+\infty\}$ can be omitted without any changes. If $\{-\infty\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ the statement is obvious. Otherwise we have

$$\bigcup \{A + B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A + \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

The assertion now follows from the above considerations.

(ii) We have $A \oplus B \preceq \sup \mathcal{A} \oplus \sup \mathcal{B}$ for all $A \in \mathcal{A}$ and all $B \in \mathcal{B}$. As $\mathcal{I}$ is a complete lattice, the assertion follows by taking the supremum. $\square$

The support function $\sigma_A: \mathbb{R}^q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ with respect to $A \subseteq \mathbb{R}^q$ is defined as follows:

$$\sigma_A(y^*) = \sigma(y^* \mid A) = \sup_{y \in A} \langle y^*, y \rangle$$

where $\overline{\mathbb{R}}$ is equipped with the sup-addition, that is, $-\infty + \infty = +\infty - \infty = -\infty$. This ensures that the expression

$$\forall y^* \in \mathbb{R}^q : \quad \sigma(y^* \mid A + B) = \sigma(y^* \mid A) + \sigma(y^* \mid B)$$

is valid for all (not necessarily nonempty) sets $A, B \subseteq \mathbb{R}^q$.

The main tool for the proofs of the duality assertions is the scalarization of the $\mathcal{I}$ -valued problem depending on a parameter $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$. For $A \in \mathcal{I}$, we set

$$\varphi_A(y^*) := \varphi(y^* \mid A) := -\sigma(y^* \mid \text{Cl}_+ A). \quad (2)$$

For fixed $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$ we get by (2) a functional from $\mathcal{I}$ to $\overline{\mathbb{R}}$. The addition, the multiplication by positive real numbers, the infimum and the supremum for extended real-valued functions are defined pointwise. We now use the inf-addition, i.e., $-\infty + \infty = +\infty - \infty = +\infty$.

For fixed $A \in \mathcal{I}$, we consider φ_A to be a function from $C^\circ \setminus \{0\}$ into $\overline{\mathbb{R}}$, that is,

$$\varphi_A: C^\circ \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

This means, for instance, that we write $\varphi_A \equiv \gamma$ for some $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ whenever $\varphi_A(y^*) = \gamma$ for all $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$.

Theorem 3.6 For any $A, B \in \mathcal{I}$ and $\alpha > 0$ it holds

- (i) $[\text{Cl}_+ A = \text{conv Cl}_+ A \wedge \varphi_A \equiv -\infty] \iff A = \{-\infty\},$
- (ii) $\varphi_A \equiv +\infty \iff [\exists y^* \in C^\circ \setminus \{0\} : \varphi_A(y^*) = +\infty] \iff A = \{+\infty\},$
- (iii) $A \preceq B \implies \varphi_A \leq \varphi_B,$
- (iv) $[\text{Cl}_+ A = \text{conv Cl}_+ A \wedge \varphi_A \leq \varphi_B] \implies A \preceq B,$
- (v) $\varphi_{A \oplus B} = \varphi_A + \varphi_B,$
- (vi) $\varphi_{\alpha \odot A} = \alpha \cdot \varphi_A.$

For a nonempty subset $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ we have

- (vii) $\varphi_{\inf \mathcal{A}} = \inf_{A \in \mathcal{A}} \varphi_A,$
- (viii) $\varphi_{\sup \mathcal{A}} \geq \sup_{A \in \mathcal{A}} \varphi_A.$

Proof. (i) As $\text{Cl}_+ \{-\infty\} = \mathbb{R}^q$, we get $\varphi_{\{-\infty\}} = -\sigma(y^* | \mathbb{R}^q) = -\infty$ for all $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$. On the other hand, $\varphi_A \equiv -\infty$ implies that $\sigma(y^* | \text{Cl}_+ A) = +\infty$ for all $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$. Moreover it holds $\sigma(y^* | C) = +\infty$ for all $y^* \in \mathbb{R}^q \setminus C^\circ$. We get

$$+\infty = \sigma(y^* | \text{Cl}_+ A) + \sigma(y^* | C) = \sigma(y^* | \text{Cl}_+ A + C) = \sigma(y^* | \text{Cl}_+ A)$$

for all $y^* \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$. It follows $\text{Cl}_+ A = \text{cl conv Cl}_+ A = Y$ and hence $A = \{-\infty\}$.

(ii) It holds $\text{Cl}_+ \{+\infty\} = \emptyset$ and so $A = \{+\infty\}$ implies $\varphi_A(y^*) = -\sigma(y^* | \emptyset) = +\infty$ for all $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$. If $\sigma(y^* | \text{Cl}_+ A) = -\infty$ for some $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$, then $\text{Cl}_+ A = \emptyset$. This implies $A = \{+\infty\}$.

(iii) Let $A \preceq B$. If $A = \{-\infty\}$ or $B = \{+\infty\}$, from (i) and (ii) we get $\varphi_A \leq \varphi_B$. Otherwise we have $\text{Cl}_+ A \supseteq \text{Cl}_+ B$ and hence $\varphi_A(y^*) = -\sigma(y^* | \text{Cl}_+ A) \leq -\sigma(y^* | \text{Cl}_+ B) = \varphi_B(y^*)$ for all $y^* \in \mathbb{R}^q$, in particular, for all $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$.

(iv) Let $\varphi_A \leq \varphi_B$, i.e., for all $y^* \in C \setminus \{0\}$ it holds $-\sigma(y^* | \text{Cl}_+ A) \leq -\sigma(y^* | \text{Cl}_+ B)$. By similar arguments as in the proof of (i), the latter inequality is valid for all $y^* \in \mathbb{R}^q$. As $\text{Cl}_+ A$ is convex and closed we get $\text{Cl}_+ A \supseteq \text{cl conv Cl}_+ B \supseteq \text{Cl}_+ B$ and so $A \preceq B$.

In order to prove the statements (v) to (vii), let $y^* \in C \setminus \{0\}$ be arbitrarily given.

(v) If A or B equals $\{+\infty\}$ then $A \oplus B = \{+\infty\}$ and the statement follows from $\text{Cl}_+ \{+\infty\} = \emptyset$. If A and B are not $\{+\infty\}$ but one of them or both equal $\{-\infty\}$ then the result follows from the fact $\text{Cl}_+ \{-\infty\} = \mathbb{R}^q$. So we can assume $A, B \subseteq \mathbb{R}^q$ and in this case we have $\text{Cl}_+ A = \text{cl}(A + C)$. It holds $\varphi_{A+B}(y^*) = -\sigma(y^* | \text{cl}(A + B + C)) = -\sigma(y^* | \text{cl}(A + C)) - \sigma(y^* | \text{cl}(B + C)) = \varphi_A(y^*) + \varphi_B(y^*)$.

(vi) If $A = \{+\infty\}$, then $\alpha \odot A = \{+\infty\}$ and so $\alpha \cdot \varphi_A(y^*) = \varphi_{\alpha \odot A}(y^*) = +\infty$. If $A = \{-\infty\}$, then $\alpha \odot A = \{-\infty\}$ and so $\alpha \cdot \varphi_A(y^*) = \varphi_{\alpha \odot A}(y^*) = -\infty$. If $A \subseteq \mathbb{R}^q$, then we have $\alpha \cdot \varphi_A(y^*) = -\alpha \sigma(y^* | \text{cl}(A + C)) = -\sigma(y^* | \text{cl}(\alpha A + C)) = \varphi_{\alpha \odot A}(y^*)$.

(vii) It remains to show the statement for the case $\{+\infty\} \notin \mathcal{A}$, because omitting $\{+\infty\}$ does not change anything. If $\{-\infty\} \in \mathcal{A}$ the equality can be easily shown. So let $A \subseteq \mathbb{R}^q$ for all $A \in \mathcal{A}$. It holds

$$\begin{aligned}\varphi_{\inf \mathcal{A}}(y^*) &= -\sigma \left(y^* \middle| \text{Cl}_+ \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) = -\sigma \left(y^* \middle| \text{cl} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A + C) \right) \\ &= \inf_{A \in \mathcal{A}} -\sigma(y^* | \text{cl}(A + C)) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \varphi_A(y^*).\end{aligned}$$

(viii) We have $\sup \mathcal{A} \succcurlyeq A$ and hence $\varphi_{\sup \mathcal{A}}(y^*) \geq \varphi_A(y^*)$ for all $A \in \mathcal{A}$. Taking the supremum the statement follows. $\square$

Statement (viii) in the last theorem does not hold with equality as the following example shows:

Example 3.7 ([24, Example 1.3.6]) Let $C := \mathbb{R}_+^2$, $A_1 := \{(0, 1)^T\} + \text{bd } C$, $A_2 = \{(1, 0)^T\} + \text{bd } C$, then $\sup \{A_1, A_2\} = \{(1, 1)^T\} + \text{bd } C$. For $y^* = (-1, -1)^T$ we get $\varphi_{A_1}(y^*) = \varphi_{A_2}(y^*) = 1$ but $\varphi_{\sup \{A_1, A_2\}}(y^*) = 2$.

4 Vector optimization and $\mathcal{I}$ -valued problems

We assign in the following to a given vector optimization problem (VOP) a corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem, such that the efficient solutions of both problems coincide. By this approach, developed in [26], the theory of vector optimization can be developed in the framework of a complete lattice, i.e., it is possible to work with infimum and supremum.

We consider an objective function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$ and a corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem

$$(IVP) \quad P := \inf_{x \in S} f(x).$$

It is natural to say that $\bar{x} \in S$ is an efficient solution of (IVP) if

$$[x \in S, \quad f(x) \preccurlyeq f(\bar{x})] \implies f(x) = f(\bar{x}).$$

We denote by $S_e \subseteq S$ the set of efficient solutions of (IVP). Given a vector optimization problem (VOP), as introduced in Section 2, we speak about a corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem (IVP) if

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) = \text{Inf} \{F(x)\}.$$

Problem (IVP) is also called the *lattice extension* of (VOP), see [17] for a more detailed discussion. Note further that $\text{Inf} \{F(x)\} = \{F(x)\} + \text{bd } C$.

As $F(x) \leq_C F(v)$ if and only if $\text{Inf } F(x) \preccurlyeq \text{Inf } F(v)$, the following proposition is immediate.

Proposition 4.1 *The vector $\bar{x} \in S$ is an efficient solution of (VOP) if and only if it is an efficient solution of the corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem (IVP).*

Although both problems have the same efficient solutions, they are quite different with respect to the "lattice structure". The objective space $\mathcal{I}$ of (IVP) is always a complete lattice, even if $(\mathbb{R}^q, \leq_C)$ is not, see [17] for an example. It is natural to relate a solution for (VOP) to the attainment of the infimum of the corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem (IVP). A solution concept based on this idea is the following, compare [17, Theorem 4.3]:

Definition 4.2 *A set $\bar{X} \subseteq X$ is called a solution of the vector optimization problem (VOP) if the following three conditions are satisfied:*

- (i) $\bar{X} \subseteq S$,
- (ii) $F[\bar{X}] = \text{Min } F[S]$,
- (iii) $\text{Inf } F[\bar{X}] = \text{Inf } F[S]$.

As shown and discussed in [17], condition (iii) can be interpreted as the attainment of the infimum of the corresponding $\mathcal{I}$ -valued problem. Another interesting observation is that although the $\mathcal{I}$ -valued theory is based on the concept of weakly minimal vectors, the solution concept in Definition 4.2 corresponds to efficient (and not, as one could expect, to weakly efficient) solutions of the given vector optimization problem. As both classical concepts are involved into the new concept, this might shed a new light to a very long discussion, namely, on the competition between the practically relevant efficient solutions vs. the theoretically more convenient weakly efficient solutions. It is also shown in [17] that semi-continuity, which is an important concept in view of existence results, is much easier to handle in the $\mathcal{I}$ -valued framework.

5 Lagrange duality

This section is devoted to Lagrange duality of optimization problems with an $\mathcal{I}$ -valued objective function and set-valued constraints. Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$, let $g : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be a set-valued map and let $D \subseteq \mathbb{R}^m$ be a nonempty closed convex cone. The primal problem is given as follows:

$$(P) \quad P := \inf_{x \in S} f(x), \quad S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \cap -D \neq \emptyset\}.$$

Constraints of this type have been considered by many authors, such as Borwein [2]; Corley [7]; Luc [27]; Götz and Jahn [13]; Jahn [20]; Crespi, Ginchev and Rocca [8].

We next recall the notion of cone-convexity which is used for the set-valued constraints.

Definition 5.1 (e.g. [20]) *Let X, Λ be real linear spaces and let $D \subseteq \Lambda$ be a convex cone. A set-valued map $H : X \rightrightarrows \Lambda$ is said to be D -convex if*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall t \in [0, 1] : \quad H(tx_1 + (1-t)x_2) + D \supseteq tH(x_1) + (1-t)H(x_2).$$

We first recall a scalar Lagrange duality result with this type of set-valued constraints. The scalar result is later used in the proof of the strong duality for the general problem. We consider a scalar problem with an objective $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$(p) \quad p := \inf_{x \in S} f(x), \quad S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \cap -D \neq \emptyset\}.$$

The Lagrangean is defined as

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad L(x, \lambda) = f(x) + \inf_{u \in g(x) + D} \langle \lambda, u \rangle. \quad (3)$$

The dual objective is

$$\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(\lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$$

and the dual problem is

$$(d) \quad d := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \phi(\lambda).$$

Of course it holds weak duality, i.e., $d \leq p$. Under certain convexity assumptions and some constraint qualification we get the following strong duality assertion, which we prove in the same way as in [3, Proposition 4.3.5].

Theorem 5.2 *Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be convex, let $g : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be D -convex and let*

$$g(\text{dom } f) \cap -\text{int } D \neq \emptyset.$$

Then, we have strong duality between (p) and (d), i.e., $d = p$.

Proof. The value function is defined by

$$v : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \quad v(b) := \inf \{f(x) \mid g(x) \cap (\{b\} - D) \neq \emptyset\}.$$

The value function v is easily shown to be convex and it holds $v(0) = p$. For the conjugate $v^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ of v it holds

$$\begin{aligned} v^*(-\lambda) &= \sup \{-\lambda^T b - v(b) \mid b \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \sup \{-\lambda^T b - f(x) \mid g(x) \cap (\{b\} - D) \neq \emptyset, b \in \mathbb{R}^m, x \in \text{dom } f\} \\ &= \sup \{-\lambda^T b - f(x) \mid b \in g(x) + D, x \in \text{dom } f\} \\ &= - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = -\phi(\lambda) \end{aligned}$$

It follows $v^{**}(0) = d$. The constraint qualification yields that v is lower semi-continuous at 0. The biconjugation theorem (e.g. [3, Theorem 4.2.8]) yields $d = p$, whenever p is finite. Otherwise we get $d = p = -\infty$ from the weak duality. $\square$

We now develop an $\mathcal{I}$ -valued version of the latter theorem. The definition of a convex $\mathcal{I}$ -valued function is very natural.

Definition 5.3 The function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$ is said to be convex if for all $\lambda \in [0, 1]$ and all $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ it holds

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \preceq \lambda \odot f(x_1) \oplus (1 - \lambda) \odot f(x_2).$$

If f is defined on a subset $S \subseteq \mathbb{R}^n$, then f can be extended to $\mathbb{R}^n$ by setting $f(x) := \{+\infty\}$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Then f is said to be convex if the extension is convex. It is an easy task to show that when f is convex the sets $\text{Cl}_+ f(x)$ are convex for every $x \in \text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \{+\infty\}\}$.

The Lagrangean of the problem (P) (with respect to $c \in \mathbb{R}^q$) is defined by

$$L_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{I}, \quad L_c(x, \lambda) = f(x) \oplus \inf_{u \in g(x) + D} \{\langle \lambda, u \rangle \{c\} + \text{bd } C\}. \quad (4)$$

In the special case $q = 1$, $C = \mathbb{R}_+$, $c = 1$, the Lagrangean coincides with the Lagrangean of the scalar problem (p) in (3).

The vector $c \in \mathbb{R}^q$ can be arbitrarily chosen for the moment. For the most assertions, however, we have to assume $c \in \text{int } C$. For every choice of $c \in \text{int } C$ we have a different Lagrangean and a different corresponding dual problem, but the same duality results hold for all these problems.

The scalar counterpart of the following result is well known.

Proposition 5.4 For all $x \in S$ and all $c \in \text{int } C$ it holds

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) = f(x).$$

Proof. For arbitrary $c \in \text{int } C$ it holds

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) &\stackrel{\text{Pr. 3.4(ii)}}{\preceq} f(x) \oplus \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{u \in g(x) + D} \{\langle \lambda, u \rangle \{c\} + \text{bd } C\} \\ &\stackrel{\text{Pr. 3.5(i)}}{=} f(x) \oplus \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left(\inf_{z \in g(x)} \{\langle \lambda, z \rangle \{c\} + \text{bd } C\} + \inf_{d \in D} \{\langle \lambda, d \rangle \{c\} + \text{bd } C\} \right). \end{aligned}$$

Taking into account

$$\inf_{d \in D} \{\langle \lambda, d \rangle \{c\} + \text{bd } C\} = \begin{cases} \text{bd } C & \text{if } \lambda \in -D^\circ \\ \{-\infty\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

we get

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) &\preceq f(x) \oplus \sup_{\lambda \in -D^\circ} \inf_{z \in g(x)} \{\langle \lambda, z \rangle \{c\} + \text{bd } C\} \\ &\preceq f(x) \oplus \sup_{\lambda \in -D^\circ} \inf_{z \in g(x) \cap -D} \{\langle \lambda, z \rangle \{c\} + \text{bd } C\} \\ &\preceq f(x) \oplus \inf_{z \in g(x) \cap -D} \sup_{\lambda \in -D^\circ} \{\langle \lambda, z \rangle \{c\} + \text{bd } C\} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Since $L(x, 0) = f(x)$, it follows that $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) = f(x)$. $\square$

We next define the dual problem. The dual objective function (w.r.t. $c \in \mathbb{R}^q$) is defined by

$$\phi_c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{I}, \quad \phi_c(\lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L_c(x, \lambda).$$

The dual problem (w.r.t. $c \in \mathbb{R}^q$) associated to (P) is defined by

$$(D_c) \quad D_c := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \phi_c(\lambda).$$

Theorem 5.5 (weak duality) *Let $c \in \text{int } C$. Then the problems (P) and (D_c) satisfy the weak duality inequality between (P) and (D_c) , i.e., $D_c \preceq P$.*

Proof. Since $\mathcal{I}$ is a complete lattice, we immediately have

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L_c(x, \lambda) \preceq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda), \quad (5)$$

(even if L_c would be replaced by an arbitrary function from $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ into $\mathcal{I}$). By Proposition 5.4 we know that $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) \preceq P$ in case of $c \in \text{int } C$. $\square$

It follows the main result of this article, a strong duality theorem.

Theorem 5.6 (strong duality) *Let f be convex and let g be D -convex, let*

$$g(\text{dom } f) \cap -\text{int } D \neq \emptyset, \quad (6)$$

and let $c \in \text{int } C$. Then, we have strong duality between (P) and (D_c) , i.e., $D_c = P$.

Proof. Of course, we have $P \neq \{+\infty\}$ (by (6)). If $P = \{-\infty\}$ we obtain $P = D_c$ from the weak duality. So we can assume $P \subseteq \mathbb{R}^q$. As P is self-infimal, it is nonempty.

Let $y^* \in C^\circ$ such that $c^T y^* = -1$. It holds

$$\begin{aligned} \varphi \left(y^* \left| \inf_{u \in g(x)+D} \{ \langle \lambda, u \rangle \{c\} + \text{bd } C \} \right. \right) &\stackrel{\text{Th. 3.6 (vii)}}{=} \inf_{u \in g(x)+D} \varphi(y^* \mid \langle \lambda, u \rangle \{c\} + \text{bd } C) \\ &= \inf_{u \in g(x)+D} -\sigma(y^* \mid \langle \lambda, u \rangle \{c\} + C) \\ &= \inf_{u \in g(x)+D} \langle \lambda, u \rangle. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
\varphi(y^*|P) &= \varphi\left(y^* \left| \inf_{g(x) \cap -D \neq \emptyset} f(x) \right. \right) \\
&\stackrel{\text{Th. 3.6 (vii)}}{=} \inf_{g(x) \cap -D \neq \emptyset} \varphi(y^*|f(x)) \\
&\stackrel{\text{Th. 5.2}}{=} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \varphi(y^*|f(x)) + \inf_{u \in g(x)+D} \langle \lambda, u \rangle \right\} \\
&= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \varphi(y^*|f(x)) + \varphi\left(y^* \left| \inf_{u \in g(x)+D} \{\langle \lambda, u \rangle\} + \text{bd } C \right. \right) \right\} \\
&\stackrel{\text{Th. 3.6 (v, vii)}}{=} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \varphi(y^*|\phi_c(\lambda)) \\
&\stackrel{\text{Th. 3.6 (viii)}}{\leq} \varphi(y^*|\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \phi_c(\lambda)) = \varphi(y^*|D_c).
\end{aligned}$$

The same is true arbitrary $y^* \in C^\circ \setminus \{0\}$, i.e., we have $\varphi_P \leq \varphi_{D_c}$. As Cl_+P is convex, Theorem 3.6 (iv) yields $P \preceq D_c$. From the weak duality we get equality. $\square$

Note that strong duality (i.e., $P = D_c$) implies that (5) is satisfied with equality.

Proposition 5.4 clarifies the relation between the problem (P) and the Lagrangian only for feasible points $x \in S$. It remains the question what happens if x is not feasible. From special cases in scalar optimization, we expect that $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) = \{+\infty\}$. This can be shown under additional assumptions to the constraints. Note that the following proposition is not used in the proof of the duality theorem. A similar result was shown in [24].

Proposition 5.7 *If for some $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ the condition $0^+g(x) \cap -D = \{0\}$ is satisfied and $g(x)$ is a closed convex set, then for all $c \in \text{int } C$ it holds*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in S \\ \{+\infty\} & \text{else.} \end{cases}$$

Proof. The case $x \in S$ follows from Proposition 5.4. Let $x \notin S$, i.e., $g(x) \cap -D = \emptyset$. Since $0^+g(x) \cap -D = \{0\}$, the separation theorem [32, Corollary 11.4.1] yields the existence of some $\bar{\lambda} \in -D^\circ \setminus \{0\}$ such that

$$\inf_{u \in g(x)+D} \langle \bar{\lambda}, u \rangle = \inf_{u \in g(x)} \langle \bar{\lambda}, u \rangle - \sup_{u \in -D} \langle \bar{\lambda}, u \rangle > 0. \quad (7)$$

Choose some $y^* \in C^\circ$ such that $c^T y^* = -1$. It holds

$$\begin{aligned}
\varphi\left(y^* \left| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) \right. \right) &\stackrel{\text{Th. 3.6 (viii)}}{\geq} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \varphi(y^*|L_c(x, \lambda)) \\
&\geq \sup_{t>0} \varphi(y^*|L_c(x, t\bar{\lambda})) \\
&= \sup_{t>0} \left(\varphi(y^*|f(x)) + t \inf_{u \in g(x)+D} \langle \bar{\lambda}, u \rangle \right) = +\infty
\end{aligned}$$

Theorem 3.6 (ii) yields that $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \lambda) = \{+\infty\}$. $\square$

The next example shows that the assumption $0^+g(x) \cap -D = \{0\}$ in the preceding proposition cannot be omitted, not even in the scalar case. However, this assumption is fulfilled in many important special cases, such as for vector-valued or compact-valued functions g .

Example 5.8 Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{I}$, $f(x) \equiv \text{Inf } \{0\} = \text{bd } C$. We set $A := \left\{ y \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_2 \geq \frac{1}{y_1} \right\}$, $g(x) := \{x\} + A$ and $D := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq 0\}$. We have $D^\circ \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^* < 0, u_2^* = 0\}$. An easy computation shows

$$L_c(0, \lambda) := \begin{cases} f(0) & \text{if } \lambda \in -D^\circ \\ \{-\infty\} & \text{else.} \end{cases}.$$

It follows that $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L_c(0, \lambda) = f(0) \neq \{+\infty\}$, but $g(0) \cap -D = \emptyset$, i.e., $0 \notin S$.

References

- [1] Birkhoff, G.: *Lattice Theory*, (3rd ed.) Am. Math. Soc. Coll. Publ. 25. Providence, 1976
- [2] Borwein, J.: Multivalued convexity and optimization: A unified approach to inequality and equality constraints, *Math. Program.* **13**, (1977), 183-199
- [3] Borwein, J.; Lewis, A.: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer, New York, 2000
- [4] Boţ, R. I.; Wanka, G.: An analysis of some dual problems in multiobjective optimization. I, II, *Optimization* **53**, No.3, (2004), 281-300, 301-324
- [5] Breckner, W. W.: Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen. I., *Math., Rev. Anal. Numér. Théor. Approximation* **1**, (1972), 5-35
- [6] Corley, H. W.: Duality theory for maximizations with respect to cones, *J. Math. Anal. Appl.* **84**, (1981), 560-568
- [7] Corley, H. W.: Existence and Lagrangian duality for maximization of set-valued functions, *J. Optimization Theory Appl.* **54**, (1987), 489-501
- [8] Crespi, G. P.; Ginchev, I.; Rocca, M.: First-order optimality conditions in set-valued optimization, *Math. Methods Oper. Res.* **63**, No. 1, (2006), 87-106
- [9] Dolecki, S.; Malivert C.: General duality in vector optimization, *Optimization* **27**, No.1-2, (1993), 97-119

- [10] Göpfert, A.: Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen. Teubner Verlagsgesellschaft, 1973
- [11] Göpfert, A.; Nehse, R.: *Vektoroptimierung. Theorie, Verfahren und Anwendungen*, Teubner, Leipzig, 1990
- [12] Göpfert, A.; Riahi, H.; Tammer, Chr.; Zălinescu, C.: *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, CMS Books in Mathematics 17. Springer-Verlag, 2003
- [13] Götz, A.; Jahn, J.: The Lagrange multiplier rule in set-valued optimization, *SIAM J. Optim.* **10**, No.2, (1999), 331–344
- [14] Hamel, A.: *Variational Principles on Metric and Uniform Spaces*, Habilitation thesis, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2005
- [15] Hamel, A.; Löhne, A.: Lagrange duality and solution concepts in set optimization, manuscript, 2009
- [16] Hamel, A.; Heyde, F.; Löhne, A.; Tammer, Chr.; Winkler, K.: Closing the duality gap in linear vector optimization, *Journal of Convex Analysis* **11**, No. 1, (2004), 163-178
- [17] Heyde, F.; Löhne, A.: Solution concepts in vector optimization. A fresh look at an old story. submitted to *SIAM Optimization*, 2008
- [18] Jahn, J.: Duality in vector optimization, *Math. Program.* **25**, (1983), 343-353
- [19] Jahn, J.: *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces*, Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main–Bern–New York, 1986
- [20] Jahn, J.: *Grundlagen der Mengenoptimierung*, Habenicht, W.; Scheubrein, B.; Scheubrein, R. (eds.): Multi-Criteria- und Fuzzy-Systeme in Theorie und Praxis, Deutscher Universitäts-Verlag, 2003
- [21] Jahn, J.: *Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [22] Kuroiwa, D.: Lagrange duality of set-valued optimization with natural criteria, *RIMS Kokyuroku* **1068**, (1998), 164-170
- [23] Löhne, A.: On conjugate duality in optimization with set relations, in: Geldermann, J.; Treitz, M. (eds.): *Entscheidungstheorie und -praxis in industrieller Produktion und Umweltforschung*, Shaker, Aachen, 2004
- [24] Löhne, A.: Optimization with set relations, PhD thesis, MLU Halle-Wittenberg, 2005
- [25] Löhne, A.: Optimization with set relations: Conjugate Duality, *Optimization* **54**, No. 3, (2005), 265-282

- [26] Löhne, A.; Tammer, C.: A new approach to duality in vector optimization. *Optimization* **56**, (2007), No. 1-2, 221-239.
- [27] Luc, D. T.: *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences, 319, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [28] Luc, D. T.; Jahn, J.: Axiomatic approach to duality in optimization, *Numer. Funct. Anal. Optimization* **13**, No.3-4, (1992), 305-326
- [29] Nakayama, H.: Duality in multi-objective optimization, in: Gal, T.; Stewart, T.J.; Hanne, T.: *Multicriteria Decision Making*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, (1999), 3-29
- [30] Nieuwenhuis, J. W.: Supremal points and generalized duality, *Math. Operationsforsch. Stat., Ser. Optimization* **11**, (1980), 41-59
- [31] Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B.: *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998
- [32] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton N. J., 1970
- [33] Sawaragi, Y.; Nakayama, H.; Tanino, T.: *Theory of multiobjective optimization*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 176. Academic Press Inc., Orlando, 1985
- [34] Schönfeld, P.: *Some duality theorems for the non-linear vector maximum problem*, Unternehmensforschung **14**, (1970), 51-63
- [35] Tammer, Chr.: Lagrange-Dualität in der Vektoroptimierung. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau* **37**, No.3, (1991), 71-88
- [36] Tanino, T.: On the supremum of a set in a multi-dimensional space, *J. Math. Anal. Appl.* **130**, (1988), 386-397
- [37] Tanino, T.: Conjugate duality in vector optimization, *J. Math. Anal. Appl.* **167**, No.1, (1992), 84-97
- [38] Tanino, T.; Sawaragi, Y.: Duality theory in multiobjective programming, *J. Optimization Theory Appl.* **27**, (1979), 509-529
- [39] Zaanen, A. C.: *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1997

Skalarisierungsfunktionale und deren Anwendungen

Christiane Tammer

Gewidmet Prof. Dr. Alfred Göpfert anlässlich seines 75. Geburtstages

Zusammenfassung

Skalarisierungsfunktionale spielen in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle (vgl. Göpfert et al. [9, Abschnitt 3.4]). Wir betrachten eine bestimmte Klasse nichtlinearer Funktionale und geben Beispiele für deren Auftreten in der Mathematik und der Ökonomie an. Insbesondere wird gezeigt, wie man Lösungen von mehrkriteriellen Optimierungsproblemen über die Lösung von skalaren Ersatzaufgaben gewinnen kann. Die skalaren Ersatzaufgaben erhält man durch Anwendung der nichtlinearen Skalarisierungsfunktionale auf das mehrkriterielle Optimierungsproblem, wobei Monotonie-Eigenschaften der Skalarisierungsfunktionale eine wichtige Rolle spielen. Diese und andere wichtige Eigenschaften der Funktionale, wie Stetigkeit, Translativität, Sublinearität und Konvexität werden gezeigt (vgl. Göpfert et al. [8, Theorem 2.3.1]). Weiterhin diskutieren wir Anwendungen der Skalarisierungsfunktionale in der Finanzmathematik und in der Standortplanung.

1 Skalarisierungsfunktionale und Beispiele

In verschiedenen Gebieten der Mathematik, insbesondere in der mehrkriteriellen Optimierung, in der Finanzmathematik und in der Funktionalanalysis spielen Skalarisierungsfunktionale eine wichtige Rolle (vgl. Göpfert et al. [8, Theorem 2.3.1] und Göpfert et al. [9, Abschnitt 3.4]). In den Arbeiten von Gerstewitz [5] und Gerstewitz, Iwanow [6] wurden entsprechende nichtlineare Funktionale eingeführt und zur Herleitung von Trennungssätzen ohne Konvexitätsvoraussetzungen an die zu trennenden Mengen genutzt (vgl. Gerth, Weidner [7]).

Es seien $\mathbb{Y}$ linearer topologischer Raum, $D \subset \mathbb{Y}$, $k^0 (\neq 0) \in \mathbb{Y}$. Wir betrachten in dieser Arbeit nichtlineare Funktionale $\varphi_{D,k^0} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, definiert durch

$$\varphi_{D,k^0}(y) := \inf \{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - D\}. \quad (1)$$

Zunächst werden einige Beispiele angegeben, in denen das Skalarisierungsfunktional (1) eine Rolle spielt.

Beispiel 1 (Mehrkriterielles Optimierungsproblem:) Der Schweizer Sozialökonom **Pareto** entwickelte 1896 ein Lösungskonzept für ein Optimierungsproblem mit mehreren, sich widersprechenden Zielfunktionen

$$(VOP) \quad v = \min_{x \in S \subset \mathbb{R}^n} f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T. \quad (2)$$

Pareto entwickelte das Konzept der Effizienz unter Berücksichtigung der im Zielraum $\mathbb{R}^m$ durch den gewöhnlichen Ordnungskegel $\mathbb{R}_+^m$ induzierten **Präferenzrelation** für den Fall $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{Y}$, $D = \mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{Y}$. Dabei heißt $y_0 \in F$ minimales Element von F bezüglich D , falls

$$F \cap (y_0 - (D \setminus \{0\})) = \emptyset.$$

Die Menge der minimalen Elemente von F bezüglich D wird mit $\text{Eff}(F, D)$ bezeichnet (siehe Abbildung 1). $x_0 \in S$ heißt effizientes Element von (VOP) falls $f(x_0) \in \text{Eff}(f(S), D)$. Ursprünge der mehrkriteriellen Optimierung sind in Abhandlungen zur Ökonomie (insbe-

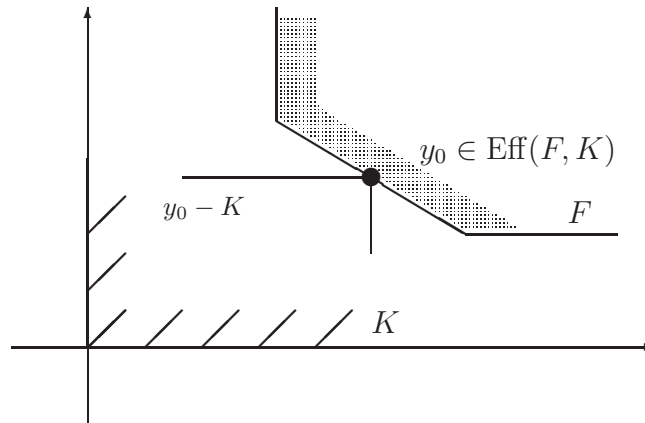


Abbildung 1: Menge der minimalen Elemente von F bezüglich $D = K$.

sondere zur Wohlfahrts- und Nutzenstheorie) und Mathematik zu finden:

- F.Y. Edgeworth (1845-1926) (Gleichgewichtsbedingungen)
- J.v. Neumann (1903-1957) (Minimax-Sätze).
- G. Cantor (1845-1918) (Durchschnittssatz)
- F. Hausdorff (1868-1942) (Existenz von Nutzensfunktionen im Kontext halbgeordneter Mengen)

- M.A. Zorn (1906-1993) (Bedingungen für die Existenz maximaler Elemente in halbgeordneten Mengen, ohne auf Nutzensfunktionen zurückzugreifen; Dominanzeigenschaften).

Um effiziente Elemente $x_0 \in S$ (mit $f(x_0) \in \text{Eff}(f(S), \mathbb{R}_+^m)$) des Problems (VOP) zu finden, verwendet man oft skalare Ersatzprobleme mit Skalarisierungsfunktionalen vom Typ (1). So betrachten Pascoletti und Serafini (vgl. [16]) folgendes Ersatzproblem

$$\min t \tag{3}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} f(x) &\in a + tk^0 - \mathbb{R}_+^m, \\ x &\in S, \\ t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(mit Parametern $a, k^0 \in \mathbb{R}^m$, $k^0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$) zur Bestimmung von Lösungen des Problems (VOP).

Beispiel 2 In Abhandlungen zur Ökonomie verwendet Luenberger [15] eine Mangel- (oder Defizit-) Funktion bezüglich der möglichen Produktmenge $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ und $g \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$:

$$\sigma(g; y) := \inf\{\xi \in \mathbb{R} \mid y - \xi g \in \mathcal{Y}\},$$

Bonnisseau, Cornet [2] (für den Fall $g = (1, \dots, 1)$) und Luenberger [15] bezeichnen diese Funktion auch als Wohltätigkeits-Funktion.

Beispiel 3 (Finanzmathematik:) Im Markowitz-Modell (1952) (vgl. Abschnitt 4.2) werden gleichzeitig Erwartungswert des Returns und die Varianz optimiert. Damit liegt ein Bikriterielles Optimierungsproblem vor. Um dieses zu lösen, kann man eine Skalarisierung mit Hilfe des Funktional (1) nutzen. In der Arbeit von Artzner et al. (1999) werden Funktionale vom Typ (1) als kohärente Risikomaße (vgl. Abschnitt 4.1) eingeführt.

Beispiel 4 (Funktionalanalysis:) Rubinov und Singer [18] führten sogenannte topical Funktionale ein (vgl. Hamel [13]). Dabei heißt ein Funktional $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ heißt **topical** genau dann, wenn es $\mathbb{R}_+^n$ -monoton ist und $\psi(y + tk^0) = \psi(y) - t$ mit $k^0 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Diese Funktionale und auch das Minkowski-Funktional bezüglich einer Menge D stehen in Beziehung zum oben eingeführten Funktional φ_{D, k^0} . Weiterhin sind die von Dudek [3] betrachteten **isotonic** Banach-Funktionale vom Typ des Funktional φ_{D, k^0} .

2 Ein axiomatischer Zugang zur Skalarisierung

Bei vielen Anwendungen in der Finanzmathematik und der Optimierung benötigt man bestimmte Eigenschaften der Skalarisierungsfunktionale. Wir betrachten einen linearen topologischen Raum $\mathbb{Y}$, $B \subset \mathbb{Y}$ und ein Skalarisierungsfunktional $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ mit (einigen der) folgenden Eigenschaften:

($A_\varphi 1$) Das Funktional φ ist B -monoton, d.h. $y, w \in \mathbb{Y}$, $y \in w - B$ impliziert $\varphi(y) \leq \varphi(w)$.

($A_\varphi 1'$) Das Funktional φ ist strikt B -monoton, d.h. $y, w \in \mathbb{Y}$, $y \in w - (B \setminus \{0\})$ impliziert $\varphi(y) < \varphi(w)$.

($A_\varphi 2$) Das Funktional φ ist konvex.

($A_\varphi 2'$) Das Funktional φ ist sublinear.

($A_\varphi 2''$) Das Funktional φ ist linear.

($A_\varphi 3$) Das Funktional φ besitzt die Translations-Eigenschaft

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Y} : \varphi(y + sk^0) = \varphi(y) + s. \quad (4)$$

($A_\varphi 4$) Das Funktional φ ist unterhalbstetig.

($A_\varphi 4'$) Das Funktional φ ist stetig.

3 Mathematische Eigenschaften

Wir betrachten in den folgenden Sätzen einen reellen Banach-Raum $\mathbb{Y}$. Die Aussagen des Satzes 1 werden in [8] für lineare topologische Räume $\mathbb{Y}$ gezeigt (vgl. auch [10]). Es seien $D \subset \mathbb{Y}$ eine nichtleere Menge und $k^0 \in \mathbb{Y} \setminus \{0\}$, sodass

$$D + \mathbb{R}_+ k^0 \subseteq D. \quad (5)$$

Dann definieren wir das Funktional $\varphi_{D,k^0} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (vgl. Abbildung 2)

$$\varphi_{D,k^0}(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - D\}. \quad (6)$$

Wir vereinbaren $\inf \emptyset = +\infty$.

In folgendem Satz werden Eigenschaften des Funktionals $\varphi = \varphi_{D,k^0}$ (vgl. (1), (6)), die für die oben beschriebenen Anwendungen in der Finanzmathematik und zur Skalarisierung von Vektoroptimierungsproblemen wichtig sind, nachgewiesen.

Das Funktional φ heißt eigentlich, wenn $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$ und φ nicht den Wert $-\infty$ annimmt. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{Y}$ heißt eigentlich, falls $D \neq \emptyset$, $D \neq \{0\}$ und $D \neq \mathbb{Y}$.

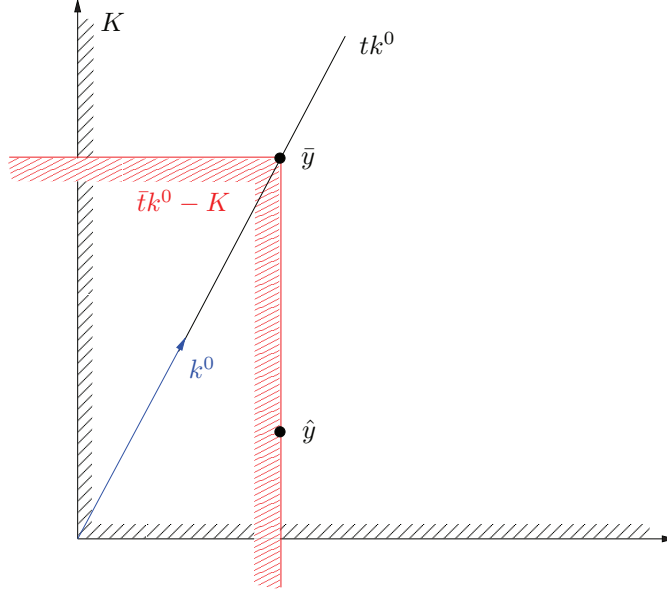


Abbildung 2: Niveaulinien des Funktional φ_{D,k^0} aus (6), wobei $D = K$ der gewöhnliche Ordnungskegel des $\mathbb{R}^2$ ist und $k^0 \in \text{int } K$ gilt.

Bemerkung 1 In [8, Theorem 2.3.1] wird gezeigt: φ ist genau dann eigentlich, wenn D keine Geradenabschnitte parallel zu k^0 enthält, d.h.

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \exists t \in \mathbb{R} : y + tk^0 \notin D. \quad (7)$$

φ ist endlich genau dann, wenn D keine Geradenabschnitte parallel zu k^0 enthält und

$$\mathbb{R}k^0 - D = \mathbb{Y}. \quad (8)$$

Weiterhin wurden von Göpfert et al. [8, Theorem 2.3.1] die folgenden wichtigen Eigenschaften des Funktional 6 nachgewiesen:

Satz 1 Es seien $D \subset \mathbb{Y}$ eine eigentliche abgeschlossene Menge und $k^0 \in \mathbb{Y}$ erfülle (5). Dann besitzt φ die Eigenschaft $(A_\varphi 4)$. Außerdem gilt $\text{dom } \varphi = \mathbb{R}k^0 - D$ und

$$\{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi(y) \leq \lambda\} = \lambda k^0 - D \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (9)$$

und

$$\varphi(y + \lambda k^0) = \varphi(y) + \lambda \quad (y \in \mathbb{Y}), \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (10)$$

d.h. φ besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 3)$. Weiterhin gilt

(a) φ besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 2)$ genau dann, wenn D konvex ist; φ besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 2')$ genau dann, wenn D ein konvexer Kegel ist.

(b) Es sei $B \subset \mathbb{Y}$; φ besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 1)$ genau dann, wenn $D + B \subseteq D$.

Wir setzen nun zusätzlich

$$D + (0, +\infty) \cdot k^0 \subseteq \text{int } D \quad (11)$$

voraus, dann ist

(c) φ stetig und

$$\{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi(y) < \lambda\} = \lambda k^0 - \text{int } D, \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (12)$$

$$\{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi(y) = \lambda\} = \lambda k^0 - \text{bd } D, \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (13)$$

(d) Falls φ eigentlich ist, dann besitzt φ die Eigenschaft $(A_\varphi 1)$ genau dann wenn $D + B \subseteq D \Leftrightarrow \text{bd } D + B \subseteq D$. Weiterhin, falls φ endlich ist, dann besitzt φ die Eigenschaft $(A_\varphi 1')$ genau dann, wenn $D + (B \setminus \{0\}) \subseteq \text{int } D \Leftrightarrow \text{bd } D + (B \setminus \{0\}) \subseteq \text{int } D$.

Beweis: Unter Voraussetzung (5) betrachten wir die Menge

$$D' := \{(y, t) \in Y \times \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - D\}.$$

Die Voraussetzung an D zeigt, dass D' von epigraphischem Typ ist, d.h. falls $(y, t) \in D'$ und $t' \geq t$, dann gilt $(y, t') \in D'$. Tatsächlich, falls $y \in tk^0 - D$ und $t' \geq t$, dann folgt $tk^0 - D = t'k^0 - [D + (t' - t)k^0] \subset t'k^0 - D$ und wir erhalten $(y, t') \in D'$. Man erkennt auch, dass $D' = T^{-1}(D)$, wobei $T : Y \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator ist, definiert durch $T(y, t) := tk^0 - y$. Also, falls D ein abgeschlossener konvexer Kegel ist, dann ist auch D' ein abgeschlossener konvexer Kegel. Da D' von epigraphischem Typ ist, betrachten wir mit D und k^0 die Funktion $\varphi := \varphi_{D, k^0} : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ definiert durch

$$\varphi(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (y, t) \in D'\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - D\}. \quad (14)$$

Natürlich ist der effektive Definitionsbereich von φ die Menge $\mathbb{R}k^0 - D$ und $D' \subset \text{epi } \varphi \subset \text{cl } D'$. Falls D abgeschlossen ist, folgt hieraus $D' = \text{epi } \varphi$ und somit ist φ ein unterhalbstetiges Funktional (d.h. $(A_\varphi 4)$ gilt), wenn D abgeschlossen ist und $\text{dom } \varphi = \mathbb{R}k^0 - D$.

Nach Definition von φ ist die Inklusion $\supseteq$ in (9) klar, während die umgekehrte Inklusion aus der Abgeschlossenheit von D folgt. Die Beziehung (10) erhalten wir leicht aus (9).

(a) Da der oben definierte Operator T surjektiv ist und $\text{epi } \varphi = T^{-1}(D)$ gilt, folgt dass $\text{epi } \varphi$ ein konvexer Kegel ist genau dann, wenn $D = T(\text{epi } \varphi)$ diese Eigenschaft besitzt. Das ergibt die Aussage.

(b) Zunächst setzen wir $D + B \subseteq D$ voraus und betrachten $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ mit $y_2 - y_1 \in B$. Es sei $t \in \mathbb{R}$ sodass $y_2 \in tk^0 - D$. Dann gilt $y_1 \in y_2 - B \subseteq tk^0 - (D + B) \subseteq tk^0 - D$, und $\varphi(y_1) \leq t$. Somit gilt $\varphi(y_1) \leq \varphi(y_2)$. Wir setzen nun voraus, dass φ B -monoton ist und betrachten $y \in D$ und $b \in B$. Aus (9) folgt $\varphi(-y) \leq 0$. Wegen $(-y) - (-y - b) \in B$ erhalten wir, dass $\varphi(-y - b) \leq \varphi(-y) \leq 0$, und somit unter Verwendung von (9) folgt $-y - b \in -D$, d.h. $y + b \in D$.

Wir setzen nun voraus, dass (11) gilt.

(c) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten $y \in \lambda k^0 - \text{int } D$. Wegen $\lambda k^0 - y \in \text{int } D$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\lambda k^0 - y - \varepsilon k^0 \in \text{int } D \subseteq D$. Daher gilt $\varphi(y) \leq \lambda - \varepsilon < \lambda$, was zeigt,

dass die Inklusion $\supseteq$ immer gilt in (12), wenn $\text{int } D \neq \emptyset$. Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Y}$ so, dass $\varphi(y) < \lambda$. Es existiert ein $t \in \mathbb{R}$, $t < \lambda$, sodass $y \in tk^0 - D$. Es folgt dann $y \in \lambda k^0 - (D + (\lambda - t)k^0) \subseteq \lambda k^0 - \text{int } D$. Daher gilt (12), und somit ist φ oberhalbstetig. Da φ auch unterhalbstetig ist, erhalten wir die Stetigkeit von φ (d.h. Eigenschaft $(A_\varphi 4')$. Aus (9) und (12) erkennen wir leicht, dass (13) gilt.

(d) Wir zeigen den zweiten Teil der Aussage, der erste Teil folgt ähnlich wie (b). Also sei φ endlich. Wir setzen voraus, dass φ strikt B -monoton ist (d.h. die Eigenschaft $(A_\varphi 1')$ besitzt) und betrachten $y \in D$ und $b \in B \setminus \{0\}$. Wegen (9) haben wir $\varphi(-y) \leq 0$, und somit nach Annahme $\varphi(-y - b) < 0$. Unter Verwendung von (12) erhalten wir $y + b \in \text{int } D$. Nun setzen wir $\text{bd } D + (B \setminus \{0\}) \subseteq \text{int } D$ voraus. Wir betrachten $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ mit $y_2 - y_1 \in B \setminus \{0\}$. Wegen (13) erhalten wir $y_2 \in \varphi(y_2)k^0 - \text{bd } D$, und somit $y_1 \in \varphi(y_2)k^0 - (\text{bd } D + (B \setminus \{0\})) \subseteq \varphi(y_2)k^0 - \text{int } D$. Wegen (12) erhalten wir $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. Die erwähnte Inklusion ist nun offensichtlich. $\square$

Bei Anwendungen in der Produktionstheorie verwendet man oft folgende Voraussetzungen:

- (P) A ist abgeschlossen und erfüllt die freie Verfügbarkeits-Bedingung $A - K = A$ und $A \neq Y$.
- (P_S) A ist abgeschlossen und erfüllt die strenge freie Verfügbarkeits-Bedingung $A - (K \setminus \{0\}) = \text{int } A$ und $A \neq Y$.

Die *freie Verfügbarkeits-Bedingung* $A = A - K$ zeigt, dass $K \subset -A_\infty$, wobei

$$A_\infty := \{u \in X \mid x + tu \in A \ (x \in A), \ (t \in \mathbb{R}_+)\}$$

den Rezessionskegel von A bezeichnet. Es folgt leicht, dass A_∞ ein konvexer Kegel ist. Es sei A abgeschlossen. Dann ist auch A_∞ abgeschlossen. Somit ist $-A_\infty$ der größte abgeschlossene konvexe Kegel K , der die *freie Verfügbarkeits-Bedingung* $A = A - K$ erfüllt. Falls A auch konvex ist, dann gilt $A_\infty = \bigcap_{t>0} t(A - a)$ für $a \in A$.

Wichtige Eigenschaften des Funktional φ_A wurden in Satz 1 gezeigt. Unter Voraussetzung (P) folgt die Unterhalbstetigkeit von φ (Eigenschaft $(A_\varphi 4)$) und darüber hinaus

$$A = \{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi_A(y) \leq 0\}, \quad \text{int } A \subset \{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi_A(y) < 0\}, \quad (15)$$

$$\varphi_A(y + tk^0) = \varphi_A(y) + t \quad (y \in \mathbb{Y}), \ (t \in \mathbb{R}), \quad (16)$$

(d.h. $(A_\varphi 3)$ ist erfüllt) und

$$\text{bd } A = A \setminus \text{int } A \supset \{y \in \mathbb{Y} \mid \varphi_A(y) = 0\}. \quad (17)$$

Dass die in (17) angegebene Inklusion strikt ist, zeigt das folgende Beispiel, wo für bestimmte $y \in \text{bd } A$ der Funktionalwert $\varphi_{A,k^0}(y) = -\infty$ ist.

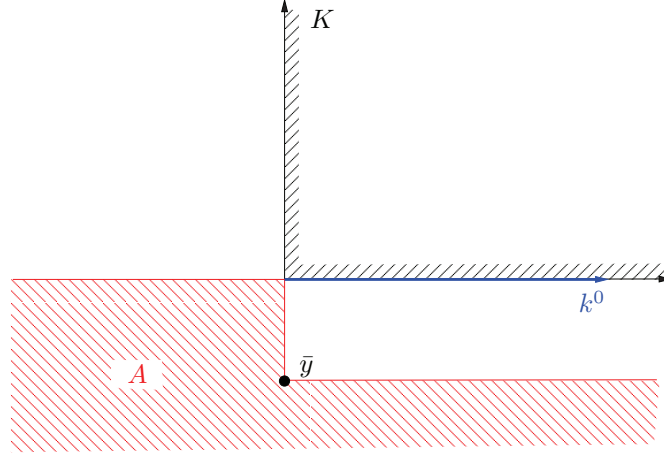


Abbildung 3: $\bar{y} \in \text{bd } A$ mit $\varphi_{A,k^0}(\bar{y}) = -\infty$.

Beispiel 5 *Es seien*

$$\varphi_{A,k^0}(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 + A\},$$

$K = \mathbb{R}_+^2$, $k^0 = (1, 0)$, $A = (]-\infty, 0] \times]-\infty, 0]) \cup ([0, +\infty[\times]-\infty, -1])$.

Dann gilt $\varphi_A(u, v) = -\infty$ für $v \leq -1$, $\varphi_A(u, v) = u$ für $v \in (-1, 0]$;

$\varphi_A(u, v) = +\infty$ für $v > 0$, $\varphi_A(0, -1) = -\infty$ und $(0, -1) \in \text{bd } A$ (vgl. Abbildung 3).

Weiterhin wurde in Satz 1, (f) die Stetigkeit von φ_A ($(A_{\varphi 4'})$) unter der Voraussetzung (11) gezeigt, die umgekehrte Inklusion in (17) gilt, falls $A - \mathbb{P}k^0 \subset \text{int } A$, wobei $\mathbb{P} :=]0, +\infty[$. Im folgenden Lemma charakterisieren wir die Stetigkeit von φ_A an der Stelle $y_0 \in \mathbb{Y}$.

Lemma 1 ([19]) *Die Funktion φ_A ist (oberhalb-) stetig an der Stelle $y_0 \in \mathbb{Y}$ genau dann, wenn $y_0 -]\varphi_A(y_0), +\infty[\cdot k^0 \subset \text{int } A$.*

Beweis: Falls $\varphi_A(y_0) = +\infty$ ist die Oberhalbstetigkeit von φ_A an der Stelle y_0 offensichtlich und die Inklusion gilt. Es sei jetzt $\varphi_A(y_0) < +\infty$.

Zunächst setzen wir voraus, dass φ_A oberhalbstetig in y_0 ist. Sei $\lambda \in]\varphi_A(y_0), +\infty[$. Dann existiert eine Umgebung V von y_0 , sodass $\varphi_A(y) < \lambda$ für jedes $y \in V$. Es folgt dann, dass für $y \in V$ gilt $y \in \lambda k^0 + A$, das bedeutet $V \subset \lambda k^0 + A$. Deshalb erhalten wir $y_0 \in \lambda k^0 + \text{int } A$ und somit $y_0 - \lambda k^0 \in \text{int } A$.

Setzen wir jetzt $y_0 -]\varphi_A(y_0), +\infty[\cdot k^0 \subset \text{int } A$ voraus und betrachten $\varphi_A(y) < \lambda < +\infty$. Dann ist unter unseren Voraussetzungen $V := \lambda k^0 + A$ eine Umgebung von y_0 und wegen der Definition von φ_A gilt $\varphi_A(y) \leq \lambda$ für jedes $y \in V$. Damit ist φ_A oberhalbstetig an der Stelle y_0 . $\square$

Folgerung 1 ([19]) *Es sei φ_A stetig an der Stelle $y_0 \in \text{bd } A$. Dann gilt $\varphi_A(y_0) = 0$.*

Beweis: Offensichtlich gilt $\varphi_A(y_0) \leq 0$. Falls $\varphi_A(y_0) < 0$, so erhalten wir mit Lemma 1 $y_0 = y_0 - 0k^0 \in \text{int } A$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

In Satz 1, (a) haben wir gezeigt, dass φ_A konvex ist ($(A_\varphi 2)$), falls A eine konvexe Menge ist. In einem solchen Fall erhalten wir aus der Stetigkeit von φ_A an einer Stelle im Inneren des effektiven Definitionsbereiches die lokale Lipschitz-Stetigkeit von φ_A im Inneren ihres effektiven Definitionsbereiches dom φ_A (falls das Funktional eigentlich ist). Darüber hinaus, falls $A = -K$ und $k^0 \in \text{int } K$, dann ist (wie bekannt) φ_A eine stetige sublineare Funktion und somit ist φ_A Lipschitz-stetig. Im folgenden Satz wird die Lipschitz-Stetigkeit von φ_A ohne Konvexitätsvoraussetzungen an A gezeigt.

Satz 2 ([19]) *Voraussetzung (P) sei erfüllt.*

(i) *Es gilt*

$$\varphi_A(y) \leq \varphi_A(y') + \varphi_{-K}(y - y') \quad (y, y' \in \mathbb{Y}). \quad (18)$$

(ii) *Falls $k^0 \in \text{int } K$, dann ist φ_A endlich und Lipschitz-stetig auf $\mathbb{Y}$.*

(iii) *Falls $y_2 \leq_K y_1$, dann gilt $\varphi_A(y_2) \leq \varphi_A(y_1)$, d.h. φ_A besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 1)$ für $B = K$.*

(iv) *Falls $A - (K \setminus \{0\}) \subset \text{int } A$ (das bedeutet, dass Voraussetzung (P_S) erfüllt ist) und φ_A eigentlich ist, dann*

$$[y_2 - y_1 \in -(K \setminus \{0\}), y_1 \in \text{dom } \varphi_A] \Rightarrow \varphi_A(y_2) < \varphi_A(y_1),$$

d.h. φ_A besitzt die Eigenschaft $(A_\varphi 1')$ für $B = K$.

Die hier gezeigte Lipschitz-Stetigkeit des Funktionals φ_A ermöglicht eine Anwendung von Lagrange-Multiplikatoren-Regeln zur Herleitung von Optimalitätsbedingungen für Lösungen von mehrkriteriellen Optimierungsproblemen (siehe [19]).

4 Anwendungen in der Finanzmathematik

4.1 Risikomaße

Das nichtlineare Funktional (1) ist gegeben durch $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ mittels

$$\varphi(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - D\}, \quad (19)$$

wobei $\mathbb{Y}$ ein reeller linearer topologischer Raum ist und $D \subseteq \mathbb{Y}$, $k^0 \in \mathbb{Y} \setminus \{0\}$, $D + \mathbb{R}_+ k^0 \subseteq D$. Dieses Funktional wird in der Finanzmathematik zur Quantifizierung von Risiken (vgl. Artzner, Delbean, Eber und Heath [1], Hamel [13], Heyde [14]) und in vielen anderen Gebieten der Mathematik und den Wirtschaftswissenschaften genutzt. Ein Beispiel für ein Vektoroptimierungsproblem, wobei die Zielfunktion in einen unendlichdimensionalen Raum $\mathbb{Y}$ von Zufallsvariablen abbildet, ist das Problem (P_{invest}) , eine bezüglich einer Präferenzrelation in $\mathbb{Y}$ optimale (effiziente) Investition zu finden. Setzen wir voraus, dass Ω eine Menge von Elementarereignissen ist (Menge aller aus heutiger Sicht möglichen zukünftigen Zustände), dann ist ein zukünftiger, mit Unsicherheit behafteter Zahlungsfluss als Ergebnis der Investition eine Zufallsvariable $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (zum Beispiel die Höhe einer Kreditrückzahlung, der Wert einer Aktie zu einem bestimmten Zeitpunkt). Falls keine Investition getätigt

wird, dann ist diese Zufallsvariable null, positive „outcomes“ sind Gewinne und negative sind Verluste. Das Lösungskonzept in diesem Vektoroptimierungsproblem wird durch eine Präferenzrelation im Raum $\mathbb{Y}$ der Zufallsvariablen beschrieben, die durch eine **Akzeptanzmenge** $D \subseteq \mathbb{Y}$ induziert wird. Artzner, Delbean, Eber and Heath [1] führten Axiome für eine Menge $D \subseteq \mathbb{Y}$ von Zufallsvariablen, die akzeptablen Investitionen entsprechen, ein:

$$(A1) \{y \in \mathbb{Y} \mid y(w) \geq 0 \ (w \in \Omega)\} \subseteq D, \ D \cap \{y \in \mathbb{Y} \mid y(w) < 0 \ \forall w \in \Omega\} = \emptyset,$$

$$(A2) \ D \text{ ist ein Kegel},$$

$$(A3) \ D + D \subseteq D.$$

Mengen $D \subseteq \mathbb{Y}$, die die Axiome (A1)–(A3) für akzeptable Risiken erfüllen, können zur Einführung einer Präferenzrelation in $\mathbb{Y}$ verwendet werden. Der Entscheidungsträger bevorzugt y^1 gegenüber y^2 (der Wechsel von y^2 zu y^1 ist ein akzeptables Risiko) genau dann, wenn $y^1 - y^2$ ein Element von D ist, d.h.

$$y^1 \geq_D y^2 \iff y^1 - y^2 \in D. \quad (20)$$

Die kleinste Menge, die (A1)–(A3) erfüllt, ist $D = \{y \in \mathbb{Y} \mid y(w) \geq 0 \text{ für alle } w \in \Omega\}$. Ein Investor mit dieser Akzeptanzmenge ist absolut Risiko-abgeneigt (risiko-averse), er akzeptiert nur Anlagen ohne Verluste (oder Verluste mit Wahrscheinlichkeit 0). Die Eigenschaften (A1)–(A3) können folgendermaßen interpretiert werden:

- (A1): Verlustlose Anlagen werden immer akzeptiert und Anlagen mit sicheren Verlusten werden nie akzeptiert.
- (A2): Ein akzeptables Risiko wird beliebig oft eingegangen.
- (A3): Mit zwei akzeptablen Risiken ist auch die Summe aus diesen beiden Risiken akzeptabel.

Mitunter wird festgestellt, dass die Axiome (A2) und (A3) nicht immer sinnvoll sind, etwa dann, wenn ein Investor nicht mehr als einen bestimmten Betrag an Geld investieren möchte. In diesem Fall kann man die Axiome (A2) und (A3) durch ein Konvexitäts-Axiom ersetzen (vgl. Föllmer und Schied [4]).

Das Funktional φ wird in der Finanzmathematik verwendet, um ein vorhandenes Risiko zu quantifizieren. Ein solches **Risikomaß** beschreibt einen Geldbetrag, der im Falle von Verlusten die Solvenz des Unternehmens bzw. der Bank mit hoher Wahrscheinlichkeit sichert. Dabei soll einerseits die Solvenz (fast) gesichert und andererseits nicht zuviel Kapital tot gelegt werden. Somit kann ein Risikomaß als minimaler Betrag an Geld (Kapital) aufgefasst werden, der dazugegeben werden muss, um die gesamte Investition (Risiko) akzeptabel zu machen.

Um ein Risikomaß bezüglich der Akzeptanzmenge $D \subseteq \mathbb{Y}$ zu beschreiben, führten Artzner, Delbean, Eber und Heath [1] (vergleiche Hamel [13], Heyde [14]) **kohärente Risikomaße** ein, d.h. eine Skalarisierung des Vektoroptimierungsproblems (P_{invest}).

Kohärente Risikomaße sind Funktionale $\mu : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, wobei $\mathbb{Y}$ der lineare Raum der Zufallsvariablen ist. In den Arbeiten von Artzner, Delbean, Eber, Heath [1] und Rockafellar, Uryasev, Zabaranin [17] werden folgende Eigenschaften für kohärente Risikomaße gefordert:

- (P1) $\mu(y + tk^0) = \mu(y) - t$ (Translations-Eigenschaft),
- (P2) $\mu(0) = 0$ und $\mu(\lambda y) = \lambda\mu(y)$ für alle $y \in \mathbb{Y}$ und $\lambda > 0$ (positive Homogenität),
- (P3) $\mu(y^1 + y^2) \leq \mu(y^1) + \mu(y^2)$ für alle $y^1, y^2 \in \mathbb{Y}$ (Subadditivität),
- (P4) $\mu(y^1) \leq \mu(y^2)$ falls $y^1 \geq y^2$ (Monotonie).

Diese Eigenschaften kann man wie folgt interpretieren:

- (P1): Die Translations-Eigenschaft sichert, dass das Risiko durch eine zusätzliche sichere Anlage in entsprechender Höhe gemildert wird.
- (P2): Die positive Homogenität besagt, dass doppeltes Risiko durch doppeltes Risikokapital abgesichert werden muss.
- (P3): Die Subadditivität bedeutet, dass eine Diversifikation des Risikos sich lohnt.
- (P4): Die Monotonie besagt, dass höheres Risiko mehr Risikokapital benötigt.

Die Niveaumenge $L_\mu(0) =: D$ von μ zum Niveau 0 ist ein konvexer Kegel und entspricht der Akzeptanzmenge. Es kann gezeigt werden, dass ein kohärentes Risikomaß dargestellt werden kann durch

$$\mu(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y + tk^0 \in D\}. \quad (21)$$

Man sieht leicht, dass ein kohärentes Risikomaß mit dem Funktional $\varphi(-y)$ (siehe (19)) identifiziert werden kann durch

$$\varphi(y) = \mu(-y).$$

Damit gelten die Eigenschaften $(A_\varphi 1)$, $(A_\varphi 2)$, $(A_\varphi 3)$ und $(A_\varphi 4)$ des Funktional (19) gemäß Satz 1 entsprechend für das Risikomaß μ . Ein Risikomaß μ induziert eine Akzeptanzmenge (abhängig von μ)

$$D_\mu := \{y \in \mathbb{Y} \mid \mu(y) \leq 0\}. \quad (22)$$

Diese Menge enthält alle Positionen, die akzeptabel sind in dem Sinn, dass sie kein zusätzliches Kapital erfordern.

Unter Verwendung der Resultate in den Theoremen 2.1 und 2.2 in Gerth, Weidner [7] und Lemma 7 in Göpfert, Tammer, Zălinescu [11] kann gezeigt werden, dass ein durch (21) gegebenes unterhalbstetiges Funktional mit

$$D = \{y \in \mathbb{Y} \mid \mu(y) \leq 0\},$$

welches die Eigenschaften (P1)–(P4) besitzt, durch (21) definiert werden kann unter Verwendung von abgeschlossenen Akzeptanzmengen D , die die Axiome (A1)–(A3) erfüllen. Das bedeutet, dass die Eigenschaften (P1)–(P4) für ein unterhalbstetiges Funktional μ gegeben durch (21) genau dann erfüllt sind, wenn μ definiert ist durch (21) für eine abgeschlossene Menge $D = \{y \in \mathbb{Y} \mid \mu(y) \leq 0\}$, die die Axiome (A1)–(A3) erfüllt.

Überdies, wie bereits erwähnt, werden in der Finanzmathematik (vgl. Föllmer, Schied [4]) die Axiome (A2) und (A3) mitunter ersetzt durch eine Konvexitätsvoraussetzung an die Akzeptanzmenge. Dann hat man entsprechende Resultate für konvexe Akzeptanzmengen und konvexe Risikomaße.

4.2 Markovitz-Modell

Harry M. Markowitz entwickelte 1952 ein Portfolio-Optimierungsproblem, welches die Entscheidungen eines Investors rational begründet. Für seine Forschungsarbeiten erhielt Markowitz 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Im Markowitz-Modell wird davon ausgegangen, dass Investoren eine Maximierung des Gewinns ihrer Anlagen anstreben und gleichzeitig das Ziel haben, das Risiko zu minimieren. Die Investoren setzen ihre Portfolios aus n unterschieden Aktien zusammen. Es wird ein *Ein-Perioden-Modell* zugrunde gelegt, d.h., der Investor trifft die Entscheidung zu Beginn einer Periode und darf diese Entscheidung bis zum Ende der Periode nicht verändern. Für eine solche festgelegte Zeitperiode soll Kapital in den n Aktien angelegt werden. Wir schreiben $x_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) für die Anteile, welche in der Aktie i angelegt werden. Dabei gilt für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $x_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Das Kapital, welches man aus der Aktie i nach der festgelegten Zeitperiode zurückerhält (Rückgabewert oder Return), bezeichnen wir mit R_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dabei handelt es sich um Zufallsvariable. Es seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ der Vektor der Anteile, $\mu_i = E[R_i]$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ der Vektor der Erwartungswerte der Returns, $C = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$ die Matrix der Kovarianzen zwischen den Returns und $R = (R_1, \dots, R_n)^T$. Das Risiko der gesamten Investition wird durch das Risikomaß *Varianz*

$$\text{Var}(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = x^T C x$$

beschrieben, der Gewinn durch den Erwartungswert des Returns $R(x) = \sum_{i=1}^n x_i R_i$, also durch

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i.$$

Natürlich soll der Gewinn so groß wie möglich und das Risiko so klein wie möglich sein. Das führt auf ein **Bikriterielles Optimierungsproblem** mit zwei Zielfunktionen:

$$(P_M) \quad \begin{pmatrix} -\mu^T x \\ x^T C x \end{pmatrix} \rightarrow \text{v-min}$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen $x \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Im Allgemeinen erhält man für ein Portfolio mit dem kleinsten Risiko nicht den größten Gewinn, d.h. die beiden Zielfunktionen widersprechen sich und man hat die für die Mehrkriterielle Optimierung typische Situation. Oft verwendet man zur Behandlung des Markowitz-Modells die *Skalarisierung von Haimes (ε -constraint-Methode)*. Dabei kann man zunächst eine untere Schranke $r_{\min} > 0$ für den Erwartungswert des Returns wählen und das Risiko über alle Portfolios minimieren unter der Nebenbedingung, dass der Erwartungswert des Returns nicht kleiner ist als $r_{\min}$ (**Min-Risk-Problem**):

$$(P_{\text{Min-Risk}}) \quad \min_{\mu^T x \geq r_{\min}, x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1} x^T C x.$$

Oder man setzt eine obere Schranke $\sigma_{\max} > 0$ für das Risiko und maximiert den Erwartungswert des Returns über alle Portfolios unter der Nebenbedingung, dass das Risiko nicht größer ist als $\sigma_{\max}$ (**Max-Return-Problem**):

$$(P_{\text{Max-Return}}) \quad \max_{x^T C x \leq \sigma_{\max}, x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1} \mu^T x.$$

Beide Ersatzprobleme stellen Skalarisierungen des Bikriteriellen Optimierungsproblems (P_M) auf $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$ dar.

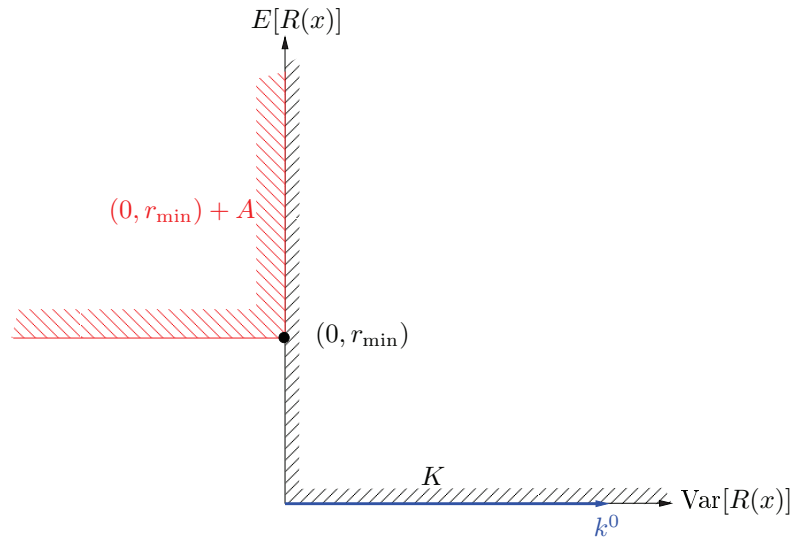


Abbildung 4: Das Funktional $\varphi(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 + (0, r_{\min}) + A\}$ beim Min-Risk-Problem.

Definiert man für das **Min-Risk-Problem** (vgl. Hamel [13]) den konvexen Kegel

$$A = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0, y_2 \geq 0\}$$

und $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$y \rightarrow \varphi(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} : y \in t(1, 0)^T + (0, r_{\min})^T + A\},$$

so ist das Min-Risk-Problem äquivalent zu (siehe Abbildung 4)

$$\min_{x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1} \varphi((\text{Var}(x), E[R(x)])^T).$$

Allerdings ist es sowohl beim Min-Risk-Problem als auch beim Max-Return-Problem durch die Einführung zusätzlicher Restriktionen $\mu^T x \geq r_{\min}$ bzw. $x^T C x \leq \sigma_{\max}$ möglich, dass der zulässige Bereich leer ist. Deshalb ist es günstiger, zur Skalarisierung des bikriteriellen Portfolio-Optimierungsproblems das Funktional (1) mit $D = \mathbb{R}_+^2$ und $k^0 = (1, 1)^T$ zu verwenden. Dieses Funktional besitzt die Eigenschaften $(A_\varphi 1)$ (für $B = D = \mathbb{R}_+^2$), $(A_\varphi 2)$, $(A_\varphi 2')$, $(A_\varphi 3)$ und $(A_\varphi 4')$.

5 Anwendungen in der Standortplanung

Um eine Anwendung des Skalarisierungsfunktionals (1) in der Regionalplanung zu diskutieren, betrachten wir folgendes Beispiel. Eine Region mit neu entstandenen Seen in der Bergbaufolgelandschaft im Südraum Halle/Leipzig soll für den Tourismus erschlossen werden. Um diese touristische Nutzung zu unterstützen, ist die Errichtung eines touristischen Informationszentrums geplant und ein geeigneter Standort dafür zu finden. Dabei soll das Informationszentrum gut von umliegenden Orten, Verkehrsknotenpunkten und Sehenswürdigkeiten (lokalisiert in $a^i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, m$)) aus erreichbar sein. Eine geeignete Zielfunktion ist zum Beispiel die Weber-Zielfunktion: Unter Verwendung von Gewichten $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) und unterschiedlichen Abstandsfunktionen $d_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) ist ein Standort $x \in \mathbb{R}^2$ für ein touristisches Informationszentrum so zu bestimmen, dass die gewichtete Summe (mit Gewichten $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$) von Abständen zwischen m gegebenen Standorten a^i ($i = 1, \dots, m$) und x minimal wird:

$$(P_\lambda) \quad f_\lambda(x) := \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i(x, a^i) \longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2},$$

wobei $d_i(x, a^i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ eine geeignete Abstandsfunktion (Norm) bezeichnet. Die Festlegung der Einzelabstände $d_i(x, a^i)$ zwischen neu zu bestimmendem Standort $x = (x^1, x^2)^T \in \mathbb{R}^2$ und den gegebenen Punkten $a^i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, m$ kann erfolgen durch:

- Euklidische Norm (Abstand als Luftlinie).
- Blocknorm (Maximum- oder Summen-Norm). Die Summen-Norm wird in Anlehnung an das Straßennetz in New York (Manhattan) auch als Manhattan-Norm bezeichnet und geht davon aus, dass der Abstand zweier Punkte durch Addition des x^1 - und des x^2 - Abstandes berechnet werden kann. Die Maximum-Norm ist als Abstandsbegriff angemessen, wenn die Bewegung in beide Richtungen gleichzeitig erfolgt und nur der größere der beiden Abstände festlegt, wie lange die Bewegung dauert.

Hierbei obliegt es dem Entscheidungsträger, die Gewichte λ_i ($i = 1, \dots, m$) festzulegen. Diese werden durch das erwartete Verkehrsaufkommen zwischen den gegebenen Standorten a^i und dem gesuchten Standort x für das touristische Informationszentrum bestimmt. Eine solche Gewichtung entspricht einer Skalarisierung des *mehrkriteriellen Standortproblems*, bei dem mehrere Zielfunktionen gleichberechtigt nebeneinander stehen:

$$(P_{VOP}) : \quad \text{Eff}(f[\mathbb{R}^2], \mathbb{R}_+^m),$$

wobei

$$f(x) := \begin{pmatrix} d_1(x, a^1) \\ \vdots \\ d_m(x, a^m) \end{pmatrix},$$

$x, a^i \in \mathbb{R}^2$, ($i = 1, \dots, m$).

Die Skalarisierung erfolgt mit Hilfe des Funktional φ_{D,k^0} vom Typ (1), wobei D durch einen Halbraum $D := \{y \in \mathbb{R}_+^m \mid \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m \geq 0\}$ gegeben ist und $k^0 = (1, 1)^T$ gesetzt wird. Mit diesen Festlegungen hat das Funktional φ_{D,k^0} die Eigenschaften $(A_\varphi 1)$ (für $B = \mathbb{R}_+^m$), $(A_\varphi 1')$ (für $B = \mathbb{R}_+^m$, falls $\forall i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i > 0$), $(A_\varphi 2)$, $(A_\varphi 2'')$, $(A_\varphi 3)$ und $(A_\varphi 4')$.

Bei der Modellbildung und bei der Visualisierung der Ergebnisse sind Geographische Informationssysteme sehr nützlich. Eine Kombination von mathematischen Methoden zur Standortbestimmung mit Geographischen Informationssystemen wird in Abbildung 5 dargestellt. In der Abbildung 5 hat der Planer die digitalen Orthophotos als Hintergrundinformationen aktiviert und darüber die thematischen Ebenen der Standortoptimierung eingeblendet. Auf der Karte sind die Eingangsgrößen a^i ($i = 1, \dots, m$) als Punkte erkennbar. Der etwas größere, dunkel markierte Punkt ist eine Näherungslösung des Problems (P_λ) mit der Summen-Norm als Abstandsfunktion und $\lambda_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$). Eine solche Näherungslösung des oben genannten Standortproblems (P_λ) kann man mittels Proximal-Point-Algorithmus erhalten (vgl. [10]). Dieser Punkt befindet sich in der Lösungsmenge des mehrkriteriellen Standortproblems (P_{VOP}) , die durch einen geometrischen Algorithmus (vgl. [12]), der auf einer Auswertung einer notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingung beruht, bestimmt wurde. Zur Lösungsmenge des mehrkriteriellen Standortproblems mit der l_1 (Summen)-Norm als Abstandsfunktion gehören die horizontal bzw. vertikal ausgerichteten Flächen, die Punkte der Eingangsgrößen sowie die Linien zwischen den Punkten der Eingangsgrößen und den Flächen der Lösungsmenge. Analog ist die Lösungsmenge des mehrkriteriellen Standortproblems mit der Maximum-Norm als Abstandsfunktion sichtbar. Die Flächen dieser Lösungsmenge sind diagonal ausgerichtet. Da alle Lösungsflächen anteilsweise transparent dargestellt werden, kann der Planer die Schnittmenge der Lösungsmengen ersehen. Diese Betrachtung ermöglicht die Einschränkung der zu betrachtenden Lösungsalternativen und ist in vielen Planungsprozessen sinnvoll.

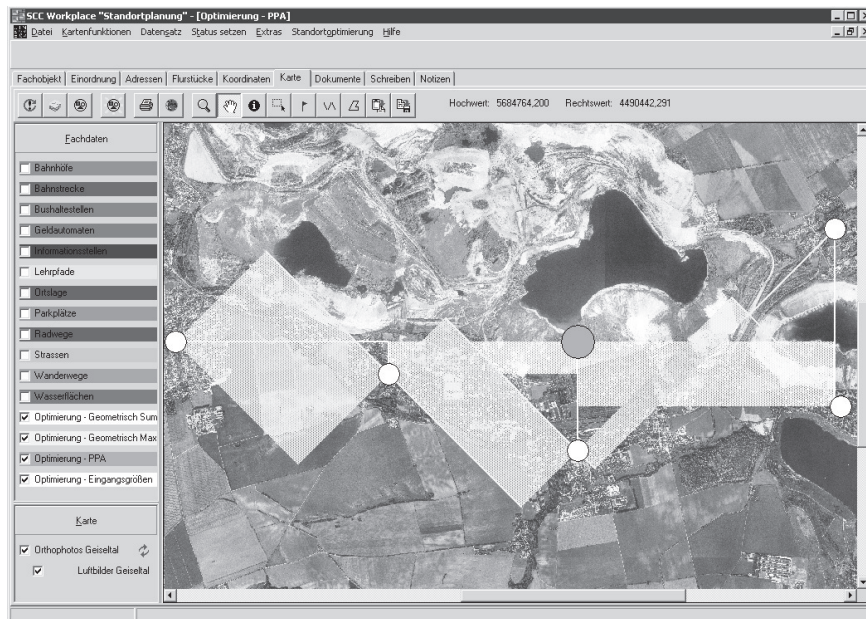


Abbildung 5: Visualisierung des Optimierungsergebnisses.

Literatur

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, 9:203–228, 1999.
- [2] J.-M. Bonnisseau and B. Cornet. Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules. *Journal of Mathematical Economics*, 17:119–147, 1988.
- [3] Z. Dudek. From isotonic Banach functionals to coherent risk measures. *Applicationes Mathematicae*, 28(4):427–436, 2001.
- [4] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance Stoch.*, 4:429–447, 2002.
- [5] Chr. Gerstewitz(Tammer). Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung. *Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Leuna-Merseburg*, 25(3):357–364, 1983.
- [6] Chr. Gerstewitz(Tammer) and E. Iwanow. Dualität für nichtkonvexe Vektoroptimierungsprobleme. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau*, 2:61–81, 1985.
- [7] Chr. Gerth(Tammer) and P. Weidner. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 67:297–320, 1990.
- [8] A. Göpfert, H. Riahi, Chr. Tammer, and C. Zălinescu. *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*. Springer, New York, 2003.

- [9] A. Göpfert, T. Riedrich, and Chr. Tammer. *Angewandte Funktionalanalysis*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [10] A. Göpfert, Chr. Tammer, and T. Riedrich. *Angewandte Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart, 2009.
- [11] A. Göpfert, Chr. Tammer, and C. Zălinescu. A new minimal point theorem in product spaces. *Z. Anal. Anwendungen*, 18:767–770, 1999.
- [12] H.W. Hamacher, K. Klamroth, and Chr. Tammer. Standortoptimierung. In B. Luderer, editor, *Die Kunst des Modellierens*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 139–156, 2008.
- [13] A. Hamel. Translative sets and functions and its applications to risk measure theory and nonlinear separation. *Preprint, Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg*, 2007.
- [14] F. Heyde. Coherent risk measures and vector optimization. In K.-H. Küfer, H. Rommelfanger, Chr. Tammer, and K. Winkler, editors, *Multicriteria Decision Making and Fuzzy Systems*. SHAKER, Aachen, 3–12, 2006.
- [15] D. G. Luenberger. New optimality principles for economic efficiency and equilibrium. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75:221–264, 1992.
- [16] A. Pascoletti and P. Serafini. Scalarizing vector optimization problems. *J. Opt. Theory Appl.*, 42:499–524, 1984.
- [17] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, and M. Zabarankin. Deviation measures in risk analysis and optimization. *Finance Stochastics*, 10:51–74, 2006.
- [18] A.M. Rubinov and I. Singer. Topical and sub-topical functions. downward sets and abstract convexity. *Optimization*, 50:307–351, 2001.
- [19] Chr. Tammer and C. Zălinescu. Lipschitz properties of the scalarization function and applications. *Optimization, to appear*, 2008.

Reports of the Institutes 2009

- 01-09.** Jan Prüß, Vicente Vergara, Rico Zacher, *Well-Posedness and Long-Time Behaviour for the Non-Isothermal Cahn-Hilliard Equation with Memory*
- 02-09.** Siegfried Carl, Patrick Winkert, *General comparison principle for variational-hemivariational inequalities*
- 03-09.** Patrick Winkert, *L^∞ –Estimates for Nonlinear Elliptic Neumann Boundary Value Problems*
- 04-09.** Wilma Di Palma, *John Neper's rods: Calculations are boring and tiring! Leon Battista Alberti's Cipher Wheel*
- 05-09.** Stefan Sperlich, *An integration calculus for stochastic processes with stationary increments and spectral density with applications to parabolic Volterra equations*
- 06-09.** Stefan Sperlich, *A Regularity Theory for Stochastic Processes with Stationary Increments and Spectral Density with Applications to Anomalous Diffusion*