Klausur „Mathematik CII", 17. Juli 2020

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei $f(x,y) = e^{-yx^2}$. Berechnen Sie die Ableitung f_{xy} an der Stelle $(x,y) = (1,0)$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Für welchen Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$(y^2 + \alpha/x^2)\,dx + 2xy\,dy$$

ein totales Differential?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_P x\,dx + xy\,dy$$

entlang der Parabel P mit $x = t$, $y = t^2$ für $t \in [0,1]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Ableitung $y'(x)$ an der Stelle $(x,y) = (1,2)$ für die durch

$$x^2 + 2y^2 - 3^2 = 0$$

implizit definierte Funktion $y(x)$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die kritischen (also die extermwertverdächtigen) Punkte der Funktion $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2 - 2y$ unter der Nebenbedingung $(2y - x + 3)^2 = 0$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen x der Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 7 (2 Punkte+2 Punkte)**.** Berechnen Sie die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Zusatz: Wie groß ist der Winkel zwischen den zugehörigen Eigenvektoren?

- Lösung zu Aufgabe 1

$$f_{xy} = 2x^3 y e^{-x^2 y} - 2x e^{-x^2 y} \,|_{\substack{x=1\\y=0}} = -2$$

- Lösung zu Aufgabe 2: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $P_y = Q_x$, also das Differential ein totales.
- Lösung zu Aufgabe 3: Das Integral ist wegabhängig, also substitutiert man $x = t$, $y = t^2$, $dx = dt$ und $dy = 2tdt$, integriert und erhält $\frac{9}{10}$.
- Lösung zu Aufgabe 4: $y' = -F_x/F_y = -\frac{1}{4}$.
- Lösung zu Aufgabe 5: Nicht beirren lassen, hier ist etwas viel leichter, als es aussieht: das Quadrat in der Nebenbedingung kann einfach weggelassen werden. Daraus ergibt sich $x = 2y - 3$, was man in die Zielfunktion einsetzt. Oder man rechnet mit Lagrange: $L(x, y, \lambda) = x^2 + xy^2 + y^2 - 2y + \lambda(2y - x + 3)$. Aus

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x + y^2 - \lambda \\ 2xy + 2y - 2 + 2\lambda \\ 2y - x + 3 \end{pmatrix} = 0$$

  folgt $(x, y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ (Maximum) und $(x, y) = (1, -1)$ (Minimum).
- Lösung zu Aufgabe 6: Addiert man die zweite Zeile zur dritten und entwickelt nach der dritten Zeile, so erhält man unmittelbar $\det(A) = (x - 3)(-x)$ also $x = 3$ und $x = 0$.
- Lösung zu Aufgabe 7: Zu $\lambda = 5$ findet man $v = (1, 3)^T$ und zu $\lambda = 1$ gehört der Eigenvektor $(-1, 1)^T$. Damit bekommt man den Winkel $\arccos(1/\sqrt{5}) \approx 1{,}107 = 63{,}4^\circ$ (oder 180° minus diesen Winkel).