	Klausur: Mathematik II für Chemiker und Biochemiker	19. Juli 2013
Nr.	Vorname:	Name: ....
1	Matrikelnummer:	Studienrichtung: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt
Punkte						

Hinweise: Bearbeitungszeit ist von $8^{\underline{15}}$ Uhr bis $10^{\underline{00}}$ Uhr. Zugelassene Hilfsmittel sind: Taschenrechner, Mitschriften aus Vorlesungen und Übungen, das Skript zur Vorlesung und ein Tafelwerk mit nicht mehr als ca. 250 Seiten. Die Ergebnisse werden unter Angabe der untenstehenden persönlichen Klausurnummer in StudIP bekannt gegeben.

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x, y(x))$ für die exakte Differentialgleichung

$$-\cos(x + y(x)) + (2y(x) - \cos(x + y(x)))\, y'(x) = 0.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 + xy - x + y^2$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Ableitung $y'(x)$ der implizit gegeben Funktion $y(x)$, die die Gleichung

$$\ln(x + y(x)) + e^{x+y(x)} = x + y(x) + e$$

erfüllt. Werten Sie $y'(x)$ im Punkt $x = 0$ und $y = 1$ aus.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Lösen Sie die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} x^2 & e^{-x} & x \\ x & -e^{-x} & 1 \\ 1 & e^{-x} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 5 **(4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zusatz: Bestimmen Sie $x, y, z \geq 0$ mit $L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ mit $LL^\top = A$.

✂ — Abschneiden und mitnehmen — ✂

Klausur-Nr.:

1

Lösung

Aufgabe 1

Die Stammfunktion der exakten Differentialgleichung erhält man aus

$$\int -\cos(x+y)\,dx = -\sin(x+y) + C(y).$$

Ableiten nach y und Vergleich mit $(2y - \cos(x+y))$ liefert $C'(y) = y^2$, also ist $F(x, y(x)) = y(x)^2 - \sin(x + y(x))$ konstant.

Aufgabe 2

Ableiten liefert $f_x = 2x + y - 1$, $f_y = x + 2y$, $f_{xx} = f_{yy} = 2$ und $f_{xy} = 1$. Der einzige kritische Punkt $(x, y) = (2/3, -1/3)$ ist wegen $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$ und $f_{xx} > 0$ ein (nicht nur lokales sondern sogar globales) Minimum.

Aufgabe 3

Da x und y nur als Summe im Term vorkommen, ist $x + y =$ konstant, also $y' = -1$. Verwendet man die Formel $y' = -F_x/F_y$, so kürzen sich Zähler und Nenner raus.

Aufgabe 4

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & e^{-x} & x \\ x & -e^{-x} & 1 \\ 1 & e^{-x} & 0 \end{pmatrix} = e^{-x}\cdot\det\begin{pmatrix} x^2 & 1 & x \\ x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{-x}\cdot(x+1) \stackrel{!}{=} 0,$$

somit ist $x = -1$ die einzige Lösung.

Aufgabe 5

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = \lambda^2 - 5\lambda = (\lambda - 0)\cdot(\lambda - 5)$$

Der Eigenvektor zu $\lambda = 0$ ist $(-1, 2)^\top$, für $\lambda = 5$ erhält man $(2, 1)^\top$. Zusatz: Aus $x^2 = 4$ folgt $x = 2$, dann $y = 1$ und schließlich $z = 0$. Die zweite Lösung $x = -2$, $y = -1$ und $z = 0$ ist durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen.