Lösung zur Klausur „Mathematik I" vom 27. März 2015

Aufgabe 1 a) $i-1=\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$ (2. Quadrant, $\varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$
$= -\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3}{4}\pi$)
$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

b) $w^3=(i-1)^2=-2i=2\,e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$\Rightarrow\ w_0=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{3}{6}\pi},\ w_1=w_0\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}},\ w_2=w_0\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Aufgabe 2 a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\left(1-\left(\frac{(2x)^2}{2!}\right)+\ldots\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}=\underline{\underline{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln(\pi)-\ln(x)}{x-\pi}=\lim\limits_{h\to0}-\frac{\ln(\pi+h)-\ln(\pi)}{h}$

$=-\ln'(\pi)=\underline{\underline{-\frac{1}{\pi}}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots}{x-\frac{x^3}{3!}+\ldots}=\underline{\underline{2}}$

Aufgabe 3 $f(z)=z+\ln(z+5)-5,\ f'(z)=1+\frac{1}{z+5}=\frac{z+6}{z+5}$

$\varphi(z)=z-\frac{z+\ln(z+5)-5}{\frac{z+6}{z+5}},\ z_0=-4,\ z_1=\frac{1}{2},$

$\underline{z_2=2.86521,\ z_3=2.92939}$

Aufgabe 4 $\int x\cos x^2\,dx=\int x\cos t\cdot\frac{dt}{2x}$ $\quad t=x^2,\ \frac{dt}{dx}=2x\ \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$

$=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$

$\Rightarrow\int_0^{\sqrt{\pi/3}}x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}=\underline{0.433013}$

Aufgabe 5 $\int\frac{1}{y^2}\,dy=\int(\sin t+2\cos t)\,dt=-\cos t+2\sin t+C$

$= -\frac{1}{y},\quad \underline{\underline{y(t)=\frac{1}{\cos t-2\sin t-\frac{1}{2}}}}$