Lösung zur Klausur „Mathematik für Chemiker und Biochemiker I“ vom 22. März 2013

Aufgabe 1

(a) $g(1+2i) = i(1+2i)^2 = i(1-4+4i) = -4-3i$
(b) $g(2e^{\frac{\pi}{6}i}) = i \cdot 4e^{\frac{\pi}{3}i} = 4e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})i} = 4e^{\frac{5}{6}\pi i}$, das Argument ist somit $\frac{5}{6}\pi$ und der Betrag ist 4.

Aufgabe 2

Beide Grenzwerte sind von der Form $0/0$, mit der Regel von l'Hospital ergibt sich:
(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\arctan(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}{x^2 - \frac{x}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2x - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.3094\ldots$$

Aufgabe 3

$f(x) = a - xe^x$, $f'(x) = -(x+1)e^x$, $f''(x) = -(x+2)e^x$. Aus $f'(x_e) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $x_e = -1$. Wegen $f''(x_e) = -e^{-1}(-1+2) < 0$ ist $x_e = -1$ ein lokales Maximum.
Ausgehend von $x_0 = 1$ erhält man mit Hilfe der Newton-Iterationsvorschrift $x_{k+1} = x_k - (5 - x_k e^{x_k})/(-(x_k+1)e^{x_k})$ die Werte $x_1 \approx 1.4197$ und $x_2 \approx 1.3326\ldots$
Zusatz: Beim Ableiten entsteht durch die Produktregel jeweils ein $-e^x$, also ist $f^{(5)}(x) = -(x+5)e^x$.

Aufgabe 4

$$\int_1^2 \ln(x^{-2})\,dx = -2\int_1^2 \ln(x)\,dx = -2[x\cdot\ln(x) - x]_1^2 = -4\ln(2) + 2 = -0.772589\ldots$$

Mit der Fassregel erhält man $\frac{1}{6}(4\ln(\frac{4}{9}) + \ln(\frac{1}{4})) = -0.771669\ldots$
Alternativlösung: Übersieht man, dass $\ln(x^{-2})$ zu $-2\ln x$ vereinfacht werden kann, so muss man einmal partiell integrieren

$$\int \ln(x^{-2})\cdot 1\,dx = \ln(x^{-2})\cdot x - \int \frac{1}{x^{-2}}\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)x\,dx = x\ln(x^{-2}) + 2x + C.$$

Aufgabe 5

Nach dem Trennen der Variablen integriert man unbestimmt

$$\int y\,dy = \int e^{3t}\,dt,$$
$$\frac{1}{2}\cdot y^2 = \frac{1}{3}e^{3t} + \widetilde{C}$$

und erhält die Lösung durch Umstellen

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}e^{3t} + C}.$$

Für den Anfangswert $y(0) = 1$ ist $C = \frac{1}{3}$, also $y(t) = \sqrt{\frac{1}{3}(2e^{3t}+1)}$.
Probe: $y'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{3t}}{\sqrt{\frac{1}{3}(2e^{3t}+1)}} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{e^{3t}}{y(t)}$