Aufgabe 1

Die Abbildung f spiegelt am Einheitskreis, denn $f(re^{i\varphi}) = 1/(\overline{re^{-i\varphi}}) = r^{-1}e^{i\varphi}$, d. h., Winkel werden erhalten und Radien invertiert. Durch Nachrechnen ergibt sich $f(2-i) = 1/\overline{2-i} = 1/(2+i) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ und $f(3e^{\frac{\pi}{2}i}) = \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$, also Betrag $\frac{1}{3}$ und Argument $\pi/2$.

Aufgabe 2

Bei (a) steht der Differenzenquotient an $\ln(\sqrt{x})$, die Lösung ist daher $\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)'\big|_{x=3} = \frac{1}{2x}\big|_{x=3} = \frac{1}{6}$. Für (b) erhält man mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x}{(1+x)e^{x+1} - 2\cos(2x)} = \frac{1}{e-2} \approx 1.3922.$$

Aufgabe 3

Aus $(x+1)e^{-x^2} = 0$ folgt $x = -1$. Die Nullstellen der Ableitung $f'(x) = -2e^{-x^2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)$ ergeben sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, $x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$, also $0.366\ldots$ und $-1.366\ldots$ Der exakte Wert des Integrals ist $1.37292\ldots$, mit der Fassregel erhält man 1.33266.

Aufgabe 4

Die Länge der Kurve in Parameterform ist

$$L = \int_0^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(2\sqrt{t})^2 + (t-1)^2}\, dt = \int_0^2 (1+t)\, dt = 4.$$

Aufgabe 5

Nach dem Trennen der Variablen integriert man unbestimmt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{y}\, dy &= \frac{16}{3}\int t\, dt, \\ \frac{2}{3}\cdot y^{3/2} &= \frac{8}{3}t^2 + \widetilde{C} \end{aligned}$$

und erhält die Lösung durch Umstellen

$$y(t) = (4t^2 + C)^{\frac{2}{3}}.$$

Für den Anfangswert $y(0) = 0$ ist $C = 0$, also $y(t) = (4t^2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16 \cdot t^4}$.