

Nr. Vorname: Name:

35 Matrikelnummer: Studienrichtung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt
Punkte						

Hinweise: Bearbeitungszeit ist von 10¹⁵ Uhr bis 12⁰⁰ Uhr. Zugelassene Hilfsmittel sind: Taschenrechner, Mitschriften aus Vorlesungen und Übungen, das Skript zur Vorlesung und ein Tafelwerk mit nicht mehr als ca. 250 Seiten. Die Ergebnisse werden unter Angabe der untenstehenden persönlichen Klausurnummer in StudIP bekannt gegeben.

Aufgabe 1 $q) \frac{1}{1+(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ (4 Punkte)

Sei $z = 1 + i$ mit $i^2 = -1$.

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $1/(1+z^2)$.

(b) Berechnen Sie die exponentielle Darstellung von z , und bestimmen Sie damit alle Lösungen der Gleichung $1/(1+w^2) = i$.

$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $w^2 = i(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$
 $\Rightarrow w_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $w_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13\pi}{8}}$ (4 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\ln(\pi/x))'}{(x-\pi)'} = \frac{-1}{\pi}$ (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 e^{-t} + e} = \underline{1e}$

Aufgabe 3

Ein quadratisches Polynom $p(t) = a + bt + ct^2$ erfülle die Bedingungen

$p(0) = 1$, $p(1) = 3$, und $\int_0^1 p(t) dt = 4$.

Bestimmen Sie den Wert des Polynoms an der Stelle $t = 1/2$, also $p(1/2)$.

Hinweis: Für eine elegante Lösung lässt sich ausnutzen, dass die Fassregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert.

$p(1/2) = x \Rightarrow \frac{1}{6}(1+4x+3) = 4 \Rightarrow \underline{x=5}$

Aufgabe 4

(3 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen des Rotationskörpers der entsteht, wenn die Funktion $y(x) = \sin(x)$ mit $0 \leq x \leq \pi$ um die x -Achse rotiert. Verwenden Sie hierfür die Trapezregel mit $N = 4$ Teilintervallen ($[0, \pi/4]$, $[\pi/4, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/4]$ und $[3\pi/4, \pi]$).

Zusatz: Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

Trapezsumme: $V \approx \frac{\pi^2}{4} (0^2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0^2) = \frac{\pi^2}{2}$ (5 Punkte)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten:

1) Trennung der Variablen $y'(t) = -2\frac{y(t)}{t} - \frac{1}{t^3}$, $t > 0$.

$y_h(t) = \frac{C}{t^2}$

2) $y(t) = c(t)/t^2 \Rightarrow c'(t) = t^2(-\frac{1}{t^3}) = -\frac{1}{t}$
 $\Rightarrow c(t) = -\ln|t| + C_1 \Rightarrow y(t) = \underline{\underline{-\frac{\ln|t|}{t^2} + \frac{C}{t^2}}}$

Vorlesung $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$
 Zusatz $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$

Abschneiden und mitnehmen