Mathematik für Chemiker und Biochemiker

Markus Arthur Köbis, Helmut Podhaisky und Jürgen Bruder

2023

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript enthält den Stoff der zweisemestrigen Vorlesung „Mathematik für Chemiker und Biochemiker“. Der Text ist als Begleitung zur Vorlesung gedacht und wird in leicht abgewandelter Form in der Vorlesung an die Tafel geschrieben. Erfahrungsgemäß hilft es beim Lernen, wenn Sie mit der Hand mitschreiben. Zur Lehrveranstaltung gehören auch Übungen, bei denen es darauf ankommt, dass Sie sich trauen, selbst zu rechnen und dass Sie *vor* der Übung versuchen, die Aufgaben zu lösen. Trauen Sie sich, Fragen zu stellen!

Ausführlichere Darstellungen finden Sie in Lehrbücher „Mathematik für Chemiker/Naturwissenschaftler“ z. B. von den Autoren Rösch, Reinsch, Zachmann/Pavel oder Brunner/Brück. Auch bei Wikipedia findet man alle Begriffe, wobei man dort oft nicht weiß, für wen die jeweils Erklärung zugeschnitten ist.

Wir danken Steffen Beck, Robert Fiedler, Katharina Jungnickel, Martin Kettmann-Pommnitz, Markus Köbis, Manuela Paschkowski, Juliane Siebert, Henning Thielemann, Rico Weiske und Victoria Wieloch für Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Dieses Skript finden Sie unter `https://www2.mathematik.uni-halle.de/podhaisky/` und Sie können es frei verwenden (Lizenz CC BY-SA 4.0).

Besonderer Dank gilt Herrn Dr. Drygalla für die Überlassung seines Vorlesungsskriptes, das teilweise in den vorliegenden Text eingeflossen ist.

Bitte senden Sie Ihre Korrektur- und Verbesserungsvorschläge an:

`helmut.podhaisky@mathematik.uni-halle.de`

Viel Erfolg beim Studieren!

Halle (Saale) im Oktober 2023, Helmut Podhaisky

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Zahlenbereiche und Mengen

Zahlenbereiche

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ sind die rationalen Zahlen. Die Darstellung ist eindeutig, wenn p und q teilerfremd sind und $q > 0$ ist.
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen. Die formale Definition von $\mathbb{R}$ ist nicht einfach. Wir stellen uns einen Zahlenstrahl (= rationale Zahlen + irrationale Zahlen) vor.
- $\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen, vgl. Abschnitt 2.

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Warum benötigt man $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$? Damit Gleichungen der Form $a + x = b$, $ax = b$, $x^a = b$ und $a^x = b$ (z. B. $x^2 = -1$) stets Lösungen besitzen. Durch eine Verallgemeinerung ergibt sich oft eine Vereinfachung. Verzichtet man z. B. bei der Buchführung auf negative Zahlen, muss man Fälle unterscheiden (Ausgaben/Einnahmen, Haben/Soll). Lässt man negative Zahlen zu, wird es übersichtlicher.

Satz 1.1. *Die Wurzel aus* 2 *ist irrational.*

Indirekter Beweis von Euklid. Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d. h., es gibt $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p/q = \sqrt{2}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind p und q teilerfremd, da man andernfalls kürzen könnte. Durch Umstellen erhalten wir $p^2 = 2q^2$, woraus man weiter Folgendes schließen kann:

$$2 \,\text{teilt}\, p^2 \;\Rightarrow\; 2 \,\text{teilt}\, p \;\Rightarrow\; 4 \,\text{teilt}\, p^2 \;\Rightarrow\; 2 \,\text{teilt}\, q^2 \;\Rightarrow\; 2 \,\text{teilt}\, q$$

Damit teilt 2 beide Zahlen, p und q, was im Widerspruch zur oben gemachten Annahme steht. Daher können p und q nicht existieren und demzufolge ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Siehe auch Wikipedia. $\square$

Mengen

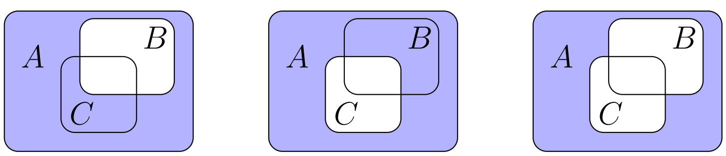
- *Teilmenge*: A ist Teilmenge von B, in Zeichen $A \subseteq B$, wenn $x \in A \Rightarrow x \in B$ gilt. Für jede beliebige Menge B gilt $\emptyset \subseteq B$ und $B \subseteq B$.
- *Vereinigung*: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- *Durchschnitt*: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$
- *Differenz*: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- *Anzahl der Elemente* oder *Kardinalität*: $|A|$ oder $\#A$

Beispiel 1.2. Sei $A = \{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der geraden und $B = \{3k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der durch drei teilbaren Zahlen. Was ist dann $A \cup B$, $A \cap B$, $\mathbb{N} \setminus A$ und $A \setminus B$?

Satz 1.3 (Regel von De Morgan)**.** *Für beliebige Mengen A, B und C gilt:*

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C) \tag{1.1}$$

Beweis.



$(A \setminus B) \quad \cap \quad (A \setminus C) \quad = \quad A \setminus (B \cup C)$

□

Definiert man Komplemente in A wird (1.1) zu $\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{B \cup C}$.

1.2 Potenzen, Exponentialfunktion und Logarithmus

Potenzfunktion $y = x^a$

Setze $x^0 = 1$ (für $x \neq 0$) und $x^n = x \cdot x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ setzt man $x^{\frac{p}{q}} = \frac{x^p}{x^q}$. Für $a \in \mathbb{R}$ definiert man x^a durch Stetigkeit. Für $x = y^{1/a}$ schreibt man auch $x = \sqrt[a]{y}$.

Exponentialfunktion $y = a^x, a > 0$

Beispiel 1.4 (Kontinuierliche Verzinsung und Eulersche Zahl)*.* Ein Euro, der mit 100% Zinsen ein Jahr angelegt wird, wird zu 2 Euro. Bei halbjähriger Verzinsung mit jeweils 50% ergibt sich das Guthaben $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}) = 2.25$ Euro. Tägliche Verzinsung liefert $G_d = (1+\frac{1}{365})^{365} \approx 2.7145\ldots$, und im Sekundentakt ergibt sich

$$G_s = \left(1 + \frac{1}{60^2 \cdot 24 \cdot 365}\right)^{60^2 \cdot 24 \cdot 365} = 2.7182817\ldots$$

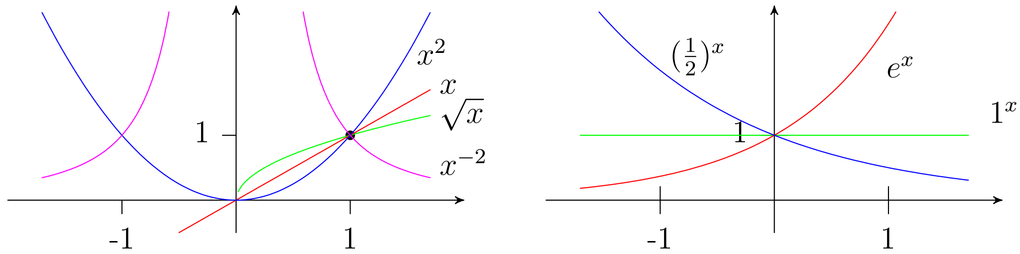


Abbildung 1.1: Potenz- und Exponentialfunktionen

Der Grenzwert definiert die Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Für den Zinzsatz x folgt dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{\frac{n}{x}\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x.$$

Beispiel 1.5 (Reihendarstellung der Exponentialfunktion)*.* Welcher Koeffizient steht bei x^k, wenn man $(1+\frac{x}{n})^n$ ausmultipliziert und dann n gegen unendlich gehen lässt? Für festes n ist

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \cdots + \frac{x^k}{n^k}\binom{n}{k} + \cdots,$$

weil es n Terme gibt und man genau k mal das x auswählen muss, um auf x^k zu kommen. Weiter ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!},$$

woraus letztendlich (nach sorgfältigem Begründen aller Schritte) die Darstellung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

folgt. Da in dieser Summe alle Potenzen mit positivem Koeffizienten vorkommen, wächst die Exponentialfunktion stärker als jede feste Potenz, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0$.

Logarithmus

Definition 1.6 (Logarithmus)*.* Sei $y = a^x$ mit $y > 0$. Dann heißt x *Logarithmus* von y zur Basis a, man schreibt $x = \log_a y$. Für $a = e$ spricht man vom *natürlichen Logarithmus* und schreibt $\log_e(y) = \ln(y)$.

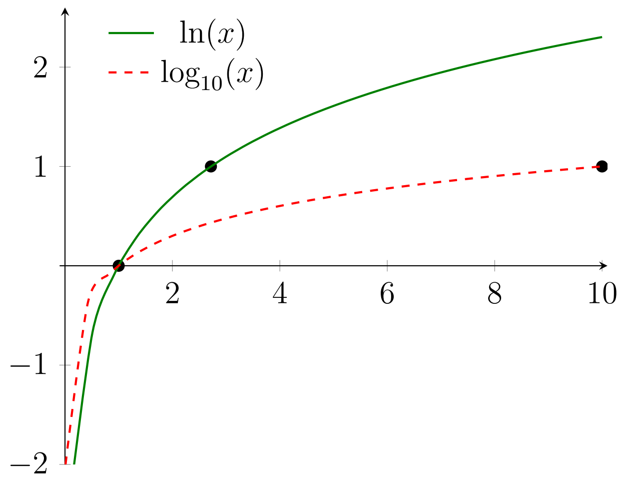


Abbildung 1.2: Logarithmusfunktionen

Satz 1.7.

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Beweis. Man sieht auf die Exponenten: $e^{\ln(x \cdot y)} = x \cdot y = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$. □

Beispiel 1.8. Man löse $a^x = y$ unter Verwendung des natürlichen Logarithmus nach x auf.
Lösung:

$$a^x = y \;\Rightarrow\; x \ln a = \ln y \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a(y)$$

Beispiel 1.9. (Radiokarbonmethode, ^{14}C-Methode) Durch kosmische Strahlung entsteht ^{14}C,

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}\mathrm{C} + p^+,$$

das mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt:

$$^{14}\mathrm{C} \to {}^{14}\mathrm{N} + e^- + \overline{\nu_e} \quad (\beta^- \text{ Zerfall}).$$

Wie alt ist ein Fundstück, bei dem $r(t) = \frac{[^{14}\mathrm{C}]}{[^{14}\mathrm{N}]}$ auf 10% des Normalwertes abgesunken ist?
Lösung. Zerfallsgesetz $r(t) = r_0 e^{-\alpha t}$. Bekannt ist $r(5730) = r_0/2$. Gesucht ist T mit $r(T) = r_0/10$. Durch Logarithmieren erhalten wir

$$-\alpha 5730 = \ln \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\alpha T = \ln \frac{1}{10}$$

und schließlich, nach Division der Gleichungen, $T = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot 5730 = 19034$ Jahre.

Bemerkung: Da die Sonnenaktivität schwankt, muss man für eine genauere Rechnung, mit kalibrierten Kurven arbeiten (für die nördliche Halbkugel mit INTCAL20, siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_calibration`).

Beispiel 1.10 (Radioaktiver Zerfall). Tschernobyl, 26.4.1986, Caesium $^{137}_{55}$Cs zerfällt mit einer Halbwertszeit von $T = 30{,}17$ Jahre.

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

Beispiel 2.1 (Quadratische Gleichungen). Betrachte $z^2+pz+q=0$. Quadratisches Ergänzen liefert $(z+p/2)^2-p^2/4+q=0$, also $z_{1/2}=-p/2\pm\sqrt{D}$ mit der Diskriminante $D=p^2/4-q$.

Rechnet man mit reellen Zahlen, so sind drei Fälle zu unterscheiden: Für $D>0$ gibt es zwei reelle Lösungen, für $D=0$ eine reelle, doppelte Lösung und für $D<0$ keine reelle Lösung.

Führt man die imaginäre Einheit i formal ein mit $i^2=-1$, so muss man keine Fälle unterscheiden. Auch für $D<0$ erhält man zwei Lösungen, die dann komplex sind $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{-D}$.

Beispiel 2.2. $z^2+4z+13=0$ hat die Lösungen $z_1=-2+3i$ und $z_2=-2-3i$.

Der „Weg durch das Komplexe“ kann Rechnungen vereinfachen. Obwohl die Nützlichkeit der komplexen Zahlen bereits von Rafael Bombelli (*1526, †1572) erkannt wurde, waren „imaginäre“ Zahlen den Mathematikern lange suspekt; es dauerte 300 Jahre, bis die komplexen Zahlen als „vollwertig“ angesehen wurden.

2.1 Arithmetische Form

Definition 2.3. Sei i die *imaginäre Einheit* mit $i^2=-1$. Eine Zahl $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ heißt *komplexe Zahl* mit *Realteil* $x=\operatorname{Re} z$ und *Imaginärteil* $y=\operatorname{Im} z$. Dann bezeichnet $\mathbb{C}=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$ die Menge der *komplexen Zahlen.* Ist $\operatorname{Im} z=0$, so ist z reell und ist $\operatorname{Re} z=0$, so heißt z imaginär.

Beispiel 2.4. Kann mein Taschenrechner mit komplexen Zahlen rechnen?

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\sqrt{-1} & \longrightarrow & 1i & \ln(-5) & \longrightarrow & 1.6094+3.1416i \\
\sqrt{\sqrt{-1}} & \longrightarrow & 0.70711+0.70711i & \arcsin(i) & \longrightarrow & 0.88137i=\ln(\sqrt{2}+1)i \\
\arcsin(2) & \longrightarrow & 1.5708+1.3170i & & &
\end{array}$$

Die Ausdrücke 0^0 und $1/0$ können auch mit komplexen Zahlen nicht sinnvoll definiert werden.

Definition 2.5 (Rechnen mit komplexen Zahlen).

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \\
z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{1}{r_2^2}\left((x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + y_1 x_2)i\right)
\end{aligned}$$

mit $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$. Bei der Multiplikation und bei der Division wird $i^2 = -1$ verwendet.

Definition 2.6. Sei $z = x + yi$ eine komplexe Zahl. Dann heißt $\bar{z} = x - yi$ die zugehörige *konjugiert komplexe Zahl*.

Beispiel 2.7. (i) $\overline{3 - 5i} = 3 + 5i$

(ii) $\bar{z} = z - 2 \operatorname{Im} z$

(iii) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(iv) $\bar{\bar{z}} = z$

(v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Beweis.

Beispiel 2.8 (Nenner reell machen). Um den Nenner reell zu machen, muss man mit der konjugiert komplexen Zahl erweitern.

$$\frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{3 - 8 + (4 + 6)i}{1 + 4} = -1 + 2i$$

Definition 2.9. Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Satz 2.10 (Der Betrag ist multiplikativ.). *Für* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Beweis.

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1}\sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1||z_2|$$

□

Grafische Darstellung komplexer Zahlen. Komplexe Zahlen lassen sich als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen, und die Rechenoperationen lassen sich geometrisch interpretieren: Der Betrag einer komplexen Zahl ist die Länge, die Addition zweier Zahlen entspricht der Vektoraddition und durch das Multiplizieren wird gestreckt und gedreht. Beispielsweise dreht eine Multiplikation mit i um 90° gegen den Uhrzeigersinn, $1 \to i \to -1 \to -i \to 1$. Das Konjugieren ist eine Spiegelung an der x-Achse.

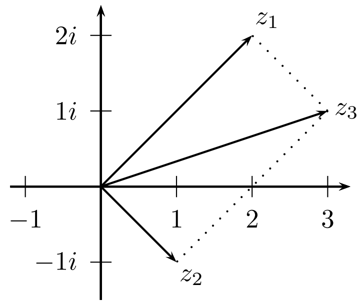


Abbildung 2.1: Addition komplexer Zahlen. Sei $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 1-i$. Dann ist $z_3 = z_1+z_2 = 3+i$. Für den Betrag von z_3 ergibt sich, nach Pythagoras, $|z_3| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.

2.2 Trigonometrische und exponentielle Form

Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x + iy$ können wir als kartesische Koordinaten interpretieren. Bei der Umrechnung in Polarkoordinaten bestimmen wir die Länge r und den Winkel φ (in Rad!) mit der positiven reellen Achse. Dabei muss man unterscheiden, ob der Realteil von z positiv oder negativ ist. Für $z = x + iy$ ist

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Man beachte, dass der Winkel φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist; addiert man 2π zu φ hinzu, so entspricht dies einer Drehung um 360°. Der Winkel φ heißt auch Argument der komplexen Zahl z, man schreibt $\varphi = \arg(z)$. Von Polarkoordinaten zurück zu kartesischen kommt man mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Beispiel 2.11 (Umrechnung in Polarkoordinaten). Sei $z = -12+5i$. Es ist $r = \sqrt{12^2+5^2} = 13$. Da $\mathrm{Re}(z) < 0$, ist der Winkel $\varphi = \arctan(-5/12) + \pi = \pi - \arctan(5/12) \approx 2.7468$.

Multiplikation von komplexen Zahlen in trigonometrischer Form

Sei $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Dann erhält man durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen (unter Ausnutzung der Additionstheoreme)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Längen werden multipliziert und Winkel addiert, d.h., Winkel verhalten sich wie Exponenten.

Satz 2.12. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Beispiel 2.13 (Multiplikation mit i, Rotation um $\pi/2$). $(2+i)i = -1+2i$

Formel von Euler

Satz 2.14 (Formel von Euler)**.** *Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \tag{2.2}$$

Für $\varphi = \pi$ erhält man die „schönste Formel der Mathematik“: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Satz 2.15 (Exponentielle Darstellung)**.** *Jede komplexe Zahl $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ besitzt eine exponentielle Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}, r \geq 0$. Dabei ist r eindeutig und φ eindeutig bis auf die Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus (2.1) und (2.2). □

Für das Rechnen mit der exponentiellen Form gelten die gewohnten Potenzgesetze. Sei $z = re^{i\varphi}$. Dann ist $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$. Beim Wurzelziehen gibt es wegen der Identität $re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$ stets n Lösungen:

$$w^n = re^{i(\varphi+2k\pi)} \Rightarrow w = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

d. h., wir erhalten

$$w_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}, \quad w_1 = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi)/n}, \quad w_2 = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+4\pi)/n}, \ldots, w_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2(n-1)\pi)/n}.$$

Beispiel 2.16. (a) Lösungen von $w^4 = 1$.

$$w_0 = 1, \quad w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad w_2 = e^{i\pi} = -1, \quad w_3 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Damit sind wir „eine Runde herum“, für $k = 4$ erhalten wir $w_4 = e^{i\frac{4}{2}\pi} = e^0 = 1 = w_0$.

(b) $w^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, also $w_0 = 2^{1/6}e^{i\pi/12}$, $w_1 = 2^{1/6}e^{i9\pi/12}$, $w_2 = 2^{1/6}e^{i17\pi/12}$.

Beweisskizze für die Eulersche Formel

Der Beweis verläuft wie eine Zinseszinsrechnung mit dem „Zinssatz“ $i\varphi$. Wird ein Vektor der Länge 1 mit $i\varphi$ multipliziert, so wird dieser Vektor dadurch um 90° gedreht und auf die Länge φ gestaucht bzw. gestreckt. Somit erhalten wir z. B. $z_1 = 1 + i\varphi$, $z_2 = (1 + \frac{i\varphi}{2})^2$ und $z_4 = (1 + \frac{i\varphi}{4})^4$ wie in Abbildung 2.2. Im Grenzübergang $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = e^{i\varphi}$ erhält man einen Kreisbogen mit Bogenlänge φ. Somit gilt

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Die Eulersche Formel zeigt, wie wichtig die Exponentialfunktion ist. Mit ihr kann man z. B. auch die Ableitungen von Sinus und Kosinus bestimmen.

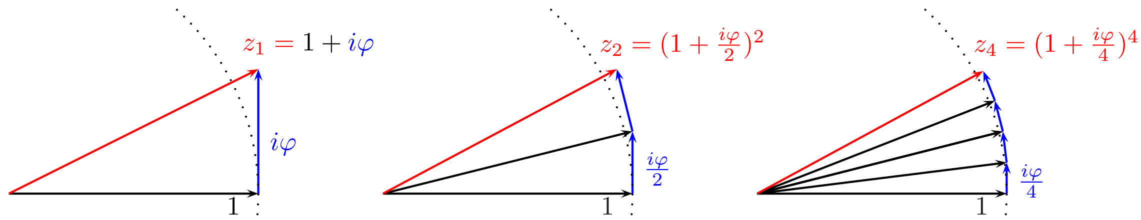


Abbildung 2.2: Skizze zum Beweis der Eulerschen Formel

Beispiel 2.17. Sei $z = a + ib = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dann gilt $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ und somit

$$z + \bar{z} = 2a = 2r\cos\varphi \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = 2ib = 2ir\sin\varphi,$$

also ist

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \text{ und } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right), \tag{2.3}$$

und für die Ableitung gilt somit

$$(\cos\varphi)' = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)' = \frac{1}{2}\left(ie^{i\varphi} - ie^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2i}\left(-e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = -\sin\varphi$$

Mit (2.3) können wir die Sinus- und Kosinusfunktion auf komplexe Zahlen fortsetzen. So ist z. B. $\sin(5i) = (e^{-5} - e^5)/(2i) = i\sinh(5) \approx 74.2032i$, also insbesondere $|\sin(5i)| \notin [-1, 1]$.

Beispiel 2.18 (Ein Additionstheorem für $\sin(x)^2$).

$$\sin(x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)$$

Beispiel 2.19 (Überlagerung von Schwingungen). Seien $y_1(t) = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2(t) = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$. Dann ist

$$y_1(t) + y_2(t) = \operatorname{Im}\left(a_1e^{(\omega t + \varphi_1)i} + a_2e^{(\omega t + \varphi_2)i}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{\omega ti}\left(a_1e^{\varphi_1 i} + a_2e^{\varphi_2 i}\right)\right).$$

Es ergibt sich also wieder eine reine Schwingung, deren Phase und Amplitude durch die Addition komplexer Zahlen $z_1 = a_1e^{\varphi_1 i}$ und $z_2 = a_2e^{\varphi_2 i}$ bestimmt ist.

Kapitel 3

Funktionen einer (reellen) Variablen

3.1 Grundbegriffe

Definition 3.1. Eine reelle Funktion f einer reellen Variablen ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D(f)$ eine Zahl $f(x)$ zuordnet. $D(f)$ heißt *Definitionsbereich* und $W(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$ heißt *Wertebereich*. Falls $y_0 = f(x_0)$, so heißt y_0 *Bild* von x_0 und x_0 (ein) *Urbild* von y_0.

Beispiel 3.2. (a) Die Funktion $x \mapsto \sin x$ ist für alle $x \in (-\infty, \infty)$ erklärt und hat (für reelle Argumente) den Wertebereich $[-1, 1]$.

(b) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

hat $D(f) = (-\infty, \infty)$ und $W(f) = \{0, 1\}$.

(c) Für $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(d) Die *Signumfunktion*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und nimmt die Werte $\{-1, 0, 1\}$ an.

Definition 3.3. Eine Funktion heißt *eineindeutig* oder *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in W(f)$ nur ein $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$ gibt. Die Funktion $g = f^{-1}$, die jedem Bild y das Urbild x zuordnet, heißt *Umkehrfunktion* von f.

Eine Umkehrfunktion f^{-1} existiert nur, wenn f eineindeutig ist. Dann gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Beispiel 3.4. Die Umkehrfunktionen von

$$\{e^x, \tan x, \sin x, \sinh x, x^2, 1/x, \operatorname{sign}(x)\}$$

für geeignet eingeschränkte Definitionsbereiche sind

$$\{\ln y, \arctan y, \arcsin y, \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}), \sqrt{y}, -\sqrt{y}, 1/y, \text{nicht definiert}\}.$$

Hintereinanderausführung von Funktionen

Definition 3.5 (Verkettung). Sei $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$. Dann heißt die Funktion $h(x) = f(g(x))$ *Verkettung* (oder auch Komposition) von f und g. Wir schreiben $h = f \circ g$ und sagen „f nach g“. Es gilt $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Beispiel 3.6. Sei $f(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $(f \circ g)(x) = e^{1/x}$ und $(g \circ f)(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, d. h., die Verkettung $\circ$ ist i. Allg. nicht kommutativ.

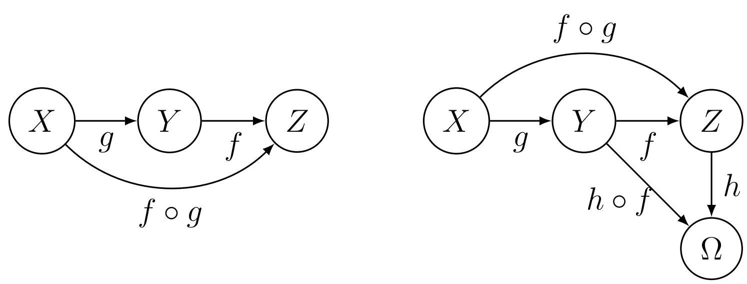


Abbildung 3.1: Hintereinanderausführung von Funktionen.

Sei $\omega = h(f(g(x)))$. Dann gilt $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$, vgl. Abbildung 3.1. Also ist die Komposition assoziativ.

Monotonie (Wachstumsverhalten) von Funktionen

Definition 3.7. Eine Funktion f heißt *monoton wachsend* (fallend) in einem Intervall $I \in D(f)$, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ gilt $f(x_2) \geq f(x_1)$ (bzw. $f(x_2) \leq f(x_1)$). Eine Funktion f wächst *streng monoton*, falls $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Satz 3.8. *Streng monotone Funktionen sind eineindeutig, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist dann auch streng monoton (auf die gleiche Art).*

Beweis. Sei $f(x)$ streng monoton wachsend. Angenommen, es gibt $x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) \geq f(x_2)$. O.B.d.A. ist $x_1 < x_2$. Mit der strengen Monotonie folgt $f(x_1) < f(x_2)$, Widerspruch. □

Beispiel 3.9. Die Funktionen $f(x) = e^x$ wächst streng monoton. Für $f(x) = x^2$ gilt das nur, wenn $x > 0$ ist.

Satz 3.10. *Sind f und g streng monoton, so ist auch $f \circ g$ streng monoton.*

Beweis. Übung □

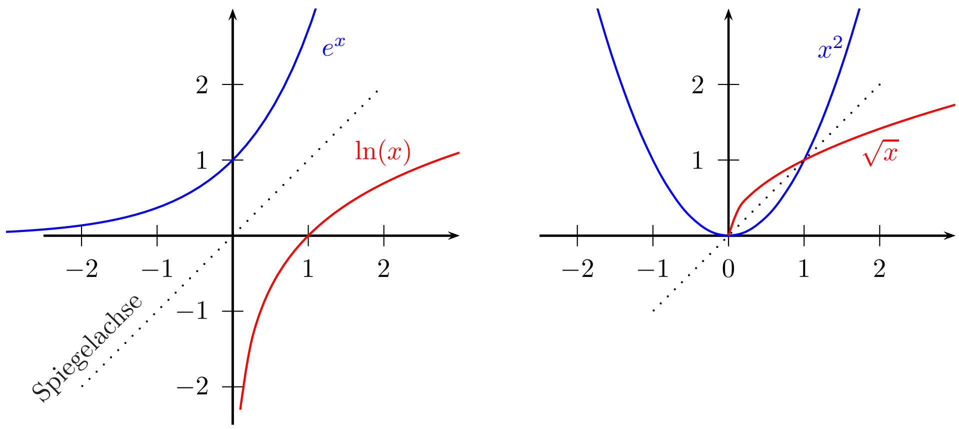


Abbildung 3.2: Funktion und Umkehrfunktion für e^x und x^2

Graphen (von Funktionen)

Der Graph einer Funktion f ist die Menge der Paare

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\}.$$

Graphen können in der *impliziten Form*

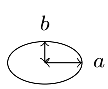
$$G = \{(x, y) : F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y\}$$

gegeben sein. In der impliziten Form kann man leicht entscheiden, ob ein Punkt $(x, y) \overset{?}{\in} G$ ist. Zum Zeichnen des Graphen ist die implizite Form weniger geeignet. Graphen können auch in *Parameterdarstellung*

$$G = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in I\}, \; I \text{ Intervall},$$

gegeben sein.

(a) Eine *Parabel* $\{(x, y) : ax^2 + bx + c - y = 0\}$ kann durch $x(t) = t$ und $y(t) = at^2 + bt + c$ für $t \in (-\infty, \infty)$ parametrisiert werden.

(b) Für eine *Ellipse* 

mit den Halbachsen a und b, implizit beschrieben durch $\{(x, y) : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$, erhält man eine Parameterdarstellung $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Eine ‘liegende’ Parabel $\{(x, y) : x - y^2 = 0\}$ lässt sich z. B. durch $x(t) = t^6$, $y(t) = t^3$ mit $t \in (-\infty, \infty)$ beschreiben.

(d) Für eine *Gerade* in der Ebene, $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ kann man einen Stellungsvektor $\vec{s}$ und einen Richtungsvektor $\vec{r}$ bestimmen, so dass $t \cdot \vec{r} + \vec{s}$ für $t \in (-\infty, \infty)$ alle Punkte durchläuft.

(e) Die Parameterdarstellung einer *arithmetischen Spirale* in Polarkoordinaten ist $r(t) = a \cdot t$, wobei r der Radius und t der Winkel ist. In kartesischen Koordinaten wird daraus $x(t) = a \cdot t \cdot \cos t$ und $y(t) = a \cdot t \cdot \sin t$.

(f) Die *Zykloide* ergibt sich als Rollkurve eines Kreises mit Radius 1 auf der x-Achse. Es ist daher $x(t) = t - \sin t$ und $y(t) = 1 - \cos t$, vgl. Abbildung 3.3.

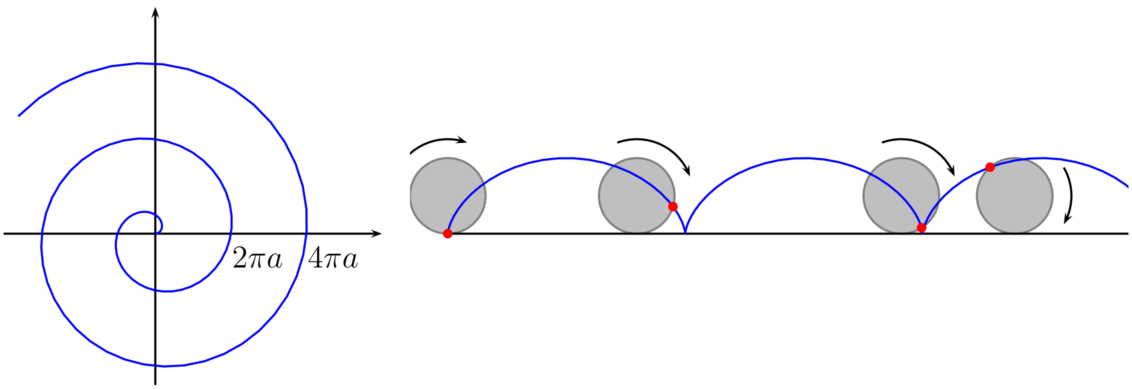


Abbildung 3.3: Arithmetische Spirale und Zykloide

3.2 Polynome

Definition 3.11. Eine Funktion

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

heißt *Polynom* in der Variablen x mit den Koeffizienten a_i. Die Funktion $x \mapsto 0$ heißt *Nullpolynom*. Ist $a_n \neq 0$, so hat $p(x)$ den *Grad* n. Das Nullpolynom hat den Grad $-\infty$.

Satz 3.12.

$$\operatorname{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{grad}(p(x)) + \operatorname{grad}(q(x))$$

Beweis.

$$(a_n x^n + \cdots)(b_m x^m + \cdots) = a_n b_m x^{n+m} + \cdots$$

Und $\operatorname{grad}(0) = -\infty = -\infty - \infty = \operatorname{grad}(0) + \operatorname{grad}(0)$. □

Satz 3.13 (Prinzip des Koeffizientenvergleiches)**.** *Zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ sind genau dann gleich, wenn sie gleichen Grad haben und alle Koeffizienten vor gleichen x-Potenzen übereinstimmen.*

Beweis. Angenommen $p(x)$ und $q(x)$ sind nicht gleich. Dann gibt es $h(x) = p(x) - q(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i$ mit $c_k \neq 0$. Aus $\lim_{x\to\infty} h(x)/x^k = c_k$ folgt $h(x) \not\equiv 0$. □

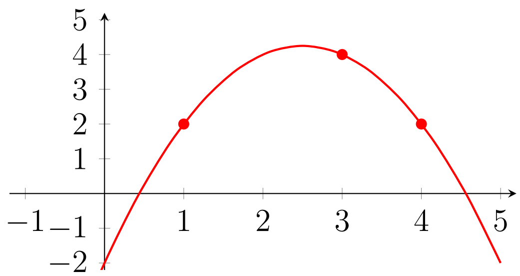
Satz 3.14 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein Polynom vom Grad n hat genau n Nullstellen x_i, die komplex sein können und es gilt die Produktdarstellung*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 3.15 (Abspalten von Nullstellen, Polynomdivision).

$$x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 36 = (x-1)(x+2)^2(x^2+9) = (x-1)(x+2)^2(x-3i)(x+3i)$$

Beispiel 3.16 (Interpolation). Gesucht ist die Parabel durch die drei Punkte $\{(1,2),(3,4),(4,2)\}$.



1. Rechenweg: Beim Lagrange-Ansatz $p(x) = a(x-3)(x-4) + b(x-1)(x-4) + c(x-1)(x-3)$ kann man a, b und c unabhängig voneinander bestimmen. Aus $p(1) = 2$ ergibt sich $a = \frac{1}{3}$. Weiter ist $b = -2$ und $c = \frac{2}{3}$. Multipliziert man aus, so ergibt sich $p(x) = -x^2 + 5x - 2$.

2. Rechenweg: Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Aus den Interpolationsbedingungen $p(x_i) = y_i$ erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, das wir mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 &= 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 &= 4 \\ a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 8 &= 2 \\ a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 15 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a_2 \cdot 3 = -3$$

Somit ist $a_0 = -2$, $a_1 = 5$ und $a_2 = -1$.

3.3 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

Definition 3.17. Eine Folge (x_k) hat den *Grenzwert* g, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|x_k - g| < \epsilon$ für alle Folgenglieder x_k mit $k > N$ gilt. Man schreibt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = g$. Für Funktionen $f(x)$ ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, falls für jede Folge (x_k) mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = g$. Ein *rechtsseitiger Grenzwert* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = g$ existiert, wenn für alle Folgen (x_k) mit $x_k > x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = g$.

Definition 3.18 (Divergenz). Wächst eine Folge (x_k) oder $(-x_k)$ über jede Schranke, so sagt man, (x_k) divergiert und strebt gegen ∞ bzw. $-\infty$.

Satz 3.19 (Rechnen mit Grenzwerten)**.** *Sei* $(x_n) \to x$ *und* $(y_n) \to y$ *und* $a \in \mathbb{C}$. *Dann gilt* $(x_n + y_n) \to x + y$, $(ax_n) \to ax$, $(x_n y_n) \to xy$ *und, für* $y \neq 0$, $(x_n/y_n) \to x/y$.

Beispiel 3.20. Warum sind $+\infty$ und $-\infty$ keine „vollwertigen" Zahlen? Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt stets $x + y = y \Longrightarrow x = 0$. Für ∞ gilt das jedoch nicht, z. B. ist $3 + \infty = \infty$, obwohl $3 \neq 0$ ist.

Beispiel 3.21. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2+x+2}{3x^2-x+7} = 2$.

(b) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)/(x - 1) = \lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$.

(c) $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ existiert nicht, vgl. Skizze.

(d) $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, vgl. Skizze.

(e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}(x + 1 - x)/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 0$.

(f) $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x$.

(g) $\lim_{x\to 0} \ln x^{-2} = \infty$.

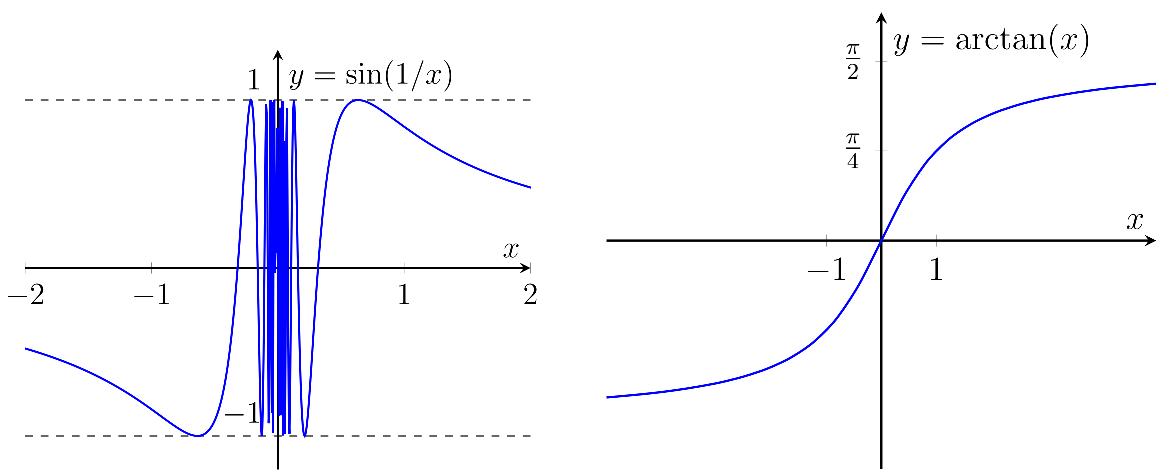


Abbildung 3.4: $f(x) = \sin(1/x)$ und $f(x) = \arctan(x)$

3.4 Stetigkeit von Funktionen

Definition 3.22. Eine Funktion f heißt *stetig* im Punkt x, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein δ existiert, mit

$$|f(x + h) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad |h| < \delta.$$

f heißt stetig im Intervall I, falls f in jedem Punkt aus I stetig ist.

Satz 3.23. f *ist stetig in* x *genau dann, wenn für jede Folge* $(x_n) \to x$ *auch* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *gilt.*

Beispiel 3.24.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^3} = \lim_{x\to\infty} e^{3\frac{\ln x}{x}} = e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

Dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ist, sieht man, wenn man $y = \ln x$ setzt und dann mit Beispiel 1.5 $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ erhält.

Stetige Funktionen haben keine Sprünge, da kleine Änderungen h von x moderate Änderungen ϵ von $f(x+h)$ bewirken. In Abbildung 3.5 sind unstetige Funktionen dargestellt.

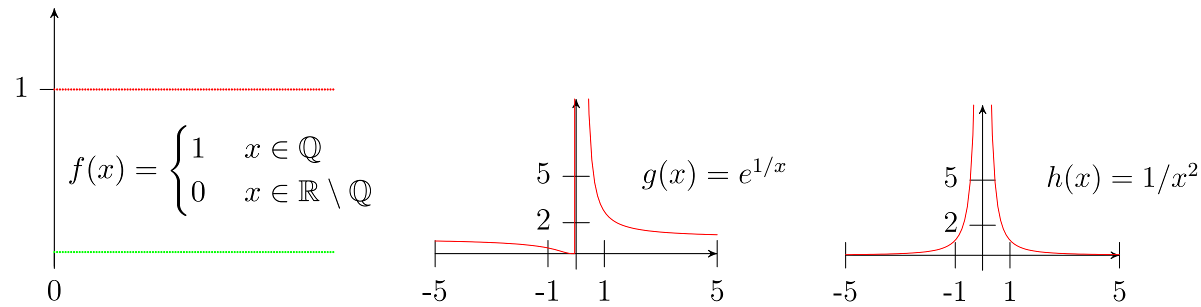


Abbildung 3.5: Beispiele für unstetige Funktionen: $f(x)$ ist überall unstetig, $g(x)$ ist für $x = 0$ einseitig unstetig, und $h(x)$ hat einen Pol bei $x = 0$.

Satz 3.25. *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig:*

$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad (f \circ g)(x)$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für $f(x)g(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} &|f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)| \\ &\qquad = |f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)| \\ &\qquad \le \underbrace{|f(x+h) - f(x)|}_{\to 0 \text{ da } f \text{ stetig}} |g(x+h)| + \underbrace{|g(x+h) - g(x)|}_{\to 0 \text{ da } g \text{ stetig}} |f(x)| \end{aligned}$$

Also gilt $|f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)| < \epsilon$ für $|h| < \delta$. □

Satz 3.26 (Bolzano)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine im Intervall $I = [a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$. Dann nimmt f jede Zahl $y \in [f(a), f(b)]$ als Wert an, d. h., es gibt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Der Satz von Bolzano ist die Grundlage für die Methode der *Bisektion*. Ist $f(a)f(b) < 0$, so gibt es eine Nullstelle $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$. Durch fortgesetzte Intervallhalbierung kann diese Nullstelle beliebig genau approximiert werden.

Beispiel 3.27. Sei $f(x) = x \ln x$, finde x^* mit $f(x^*) = 2$. Dann $f(1) = 0$, $f(3) = 3.29584$, $f(2) = 1.38629$, $f(2.5) = 2.29073$, $f(2.25) = 1.82459$, $f(2.37) = 2.05437$ usw. führt schließlich auf $x^* = 2.34575$.

Satz 3.28 (Minimum und Maximum)**.** *Eine auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt Maximum und Minimum an.*

3.5 Ableitung einer Funktion

Definition 3.29. Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ heißt, falls er existiert, erste Ableitung von f an der Stelle x_0. Man schreibt auch

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}f\right|_{x=x_0}.$$

Wenn der Grenzwert existiert, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar*.

Dabei ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ der Anstieg der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$. Im Grenzübergang erhält man die Tangente mit dem Anstieg $f'(x_0)$.

Beim „Erfinden“ des Ableitens schrieb Newton $\dot{f}(x)$, woraus später (durch Lagrange) $f'(x)$ wurde. Von Leibniz stammt die Schreibweise df/dx mit den sogenannten Differentialen, siehe auch „Prioritätenstreit“, `https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz%E2%80%93Newton_calculus_controversy`. Ein Punkt $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ zeigt, dass nach der Zeit t abgeleitet wird. Gebräuchlich ist auch eine Operatorschreibweise $\partial_x f(x)$.

Differenzierbare Funktionen sind stetig, da

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left(h\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} + f(x_0)\right) = f(x_0)$$

ist. Die Umkehrung gilt nicht, z. B. hat $f(x) = |x|$ keine Tangente in $x_0 = 0$.

Beispiel 3.30 (Ableitung der Exponentialfunktion). Sei $f(x) = e^x$ mit $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Mit der Substitution $y = e^h - 1$ folgt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln\left((1+y)^{1/y}\right)} = 1,$$

und weiter

$$\frac{d}{dx}e^x = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

Beispiel 3.31. Durch Grenzwertbildung können wir Ableitungsregeln herleiten:

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + hnx^{n-1} + h^2(\dots) - x^n}{h} = nx^{n-1}$$
$$(\text{const})' = \lim_{h\to 0}\frac{\text{const}|_{x=x_0+h} - \text{const}|_{x=x_0}}{h} = 0$$

Weiter ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = 1+\tan^2 x$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Differentiationsregeln

Satz 3.32 (Differenzieren ist linear)**.** *Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(ay(x) + bz(x))' = ay'(x) + bz'(x).$$

Satz 3.33 (Produktregel)**.** *Für Produkte gilt*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Beweis.

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u'v + uv'.$$

□

Satz 3.34 (Quotientenregel)**.**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

Beweis. Folgt aus $(u \cdot (1/v))' = u' \cdot (1/v) + u \cdot (1/v)'$ und $(1/v)' = -v'/v^2$. □

Satz 3.35 (Kettenregel)**.**

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad \textit{also} \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Damit folgt speziell $(\ln g(x))' = g'(x)/g(x)$.

Satz 3.36 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.**

$$(f^{-1}(x))' = 1/f'(f^{-1}(x))$$

Beweis. Differenzieren von $x = f(f^{-1}(x))$ liefert mit der Kettenregel $1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'$. □

Beispiel 3.37. Wir bestimmen die Ableitungen einiger Umkehrfunktionen:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f^{-1}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad (\ln x)' = 1/(e^{\ln x}) = 1/x$$
$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$$
$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x, \quad f^{-1}(x) = \arctan x$$
$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = 1/(1 + x^2)$$

Tangentenapproximation $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$

Aus der Definition der Ableitung $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ folgt durch Umstellen

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right)}_{=:R_f(h)} = 0,$$

also

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hR_f(h) \tag{3.1}$$

mit $\lim_{h\to 0} R_f(h) = 0$. Das kann man so interpretieren: Die Tangente $f(x) + hf'(x)$ approximiert für kleine h die Funktion $f(x+h)$, siehe Skizze. Man sagt auch, die Funktion $f(x+h)$ verhält sich *in erster Näherung* wie $f(x) + hf'(x)$. Die Funktion $R_f(h)$ heißt *Restglied*.

Beweis der Kettenregel. Mit Gleichung (3.1) können wir nun die Kettenregel beweisen. Zu zeigen ist $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Aus (3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} g(x+h) &= g(x) + hg'(x) + hR_g(h) \\ f(y+k) &= f(y) + kf'(y) + kR_f(k). \end{aligned}$$

Setzt man nun $y = g(x)$ und $k = hg'(x) + hR_g(h)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) = f(g(x)+k) = f(g(x)) + (hg'(x) + hR_g(h))f'(g(x)) + \\ (hg'(x) + hR_g(h))R_f(k) \\ = f(g(x)) + hg'(x)f'(g(x)) + h\underbrace{(R_g(h)f'(g(x)) + g'(x)R_f(k) + R_g(h)R_f(k))}_{=:R_{f\circ g}(h)} \end{aligned}$$

□

Berechnung von Grenzwerten der Form $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$

Satz 3.38 (Regel von Bernoulli/l'Hôspital)**.** *Sei* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der zweite Grenzwert existiert.

Beweis. Die Behauptung folgt aus (3.1) durch Einsetzen:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) + hf'(x_0) + hR_f(h)}{g(x_0) + hg'(x_0) + hR_g(h)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

falls $g'(x_0) \neq 0$. □

Bemerkung 3.39. (i) Falls auch $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{x\to x_0} g'(x) = 0$ ist, so kann man die Regel zweimal anwenden, d. h., dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(ii) Die Regel kann analog auch für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ angewandt werden.

(iii) Andere unbestimmte Ausdrücke, wie $0\cdot\infty$ oder $\infty-\infty$, kann man umformen zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

(iv) Man beachte, dass man zuerst prüfen muss, ob wirklich ein unbestimmter Ausdruck vorliegt, da sonst die Regel nicht gilt. Z. B. ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}, \quad \text{aber für die abgeleiteten Größen gilt} \quad \left.\frac{(2x)'}{(3x^2)'}\right|_{x=1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 3.40.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \left.\frac{\cos x}{1}\right|_{x=0} = 1$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

Aus (c) folgt $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})x} = e^1$.

3.6 Kurvendiskussion

Bei der Kurvendiskussion untersuchen wir für eine gegebene reelle Funktion $f(x)$ den Definitionsbereich $D(f)$, den Wertebereich $W(f)$, das Verhalten am Rand (Grenzwerte), die Monotonie, die lokalen Extrema, die Nullstellen und die Konvexität.

Satz 3.41 (Monotonie)**.** *Sei $f(x)$ differenzierbar im Intervall $[a,b]$. Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, so wächst f streng monoton.*

Beweis. Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung, siehe Seite 30, $f(x_2) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$. □

Satz 3.42 (Notwendiges Kriterium, Satz von Fermat)**.** *Besitzt die differenzierbare Funktion f ein lokales Extremum im Punkt x_0, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. (für Minimum) Sei $f(x_0)$ ein lokales Minimum. Dann ist $f(x_0+h) > f(x_0)$ für kleine h. Also ist

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0,$$

und somit ist $f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$, also $f'(x_0) = 0$. □

Beispiel 3.43.
- Für $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ ist $x_0 = 1$ ein kritischer Punkt (hier ein Minimum) mit $f'(1) = 0$.
- Für $f(x) = x^3$ ist $x_0 = 0$ ein kritischer Punkt, allerdings hat f dort kein Extremum, sondern einen Wendepunkt.

Satz 3.44 (Hinreichendes Kriterium für ein Extremum)**.** *Sei $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum. Ist $f''(x_0) < 0$ hat f in x_0 ein lokales Maximum.*

Verschwindet auch die zweite Ableitung in x_0, so muss man höhere Ableitungen von f auswerten. Angenommen, die ersten $k-1$ Ableitungen von f sind null und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) k ist ungerade: x_0 ist ein Wendepunkt (z. B. $f(x) = x^5$ in $x_0 = 0$)

(ii) k ist gerade und $f^{(k)}(x_0) > 0$: x_0 ist Minimum (z. B. $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$)

(iii) k ist gerade und $f^{(k)}(x_0) < 0$: x_0 ist Maximum (z. B. $f(x) = -x^6$ in $x_0 = 0$)

Definition 3.45. Eine Funktion f heißt konvex, wenn beliebige Sekanten „oberhalb von f“ verlaufen, also

$$f(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1) \leq \alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1)$$

gilt für beliebige $\alpha \in [0,1]$, vergleiche Abbildung 3.6.

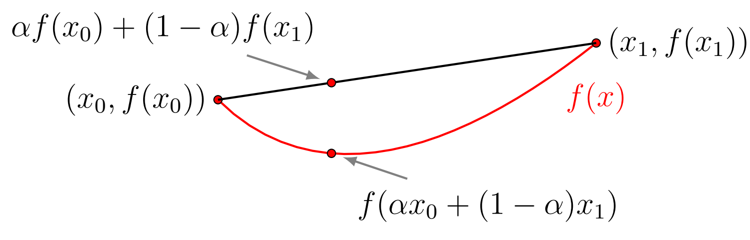
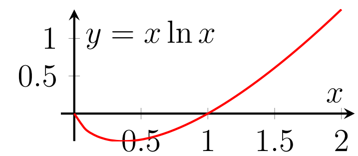


Abbildung 3.6: Die Funktion $f(x)$ ist konvex.

Satz 3.46. *Ist f konvex und zweimal differenzierbar im Intervall $[a,b]$, so wächst $f'(x)$ monoton und es gilt $f''(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$.*



Beispiel 3.47. (a) Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x \ln x$.

Der Definitionsbereich ist $D(f) = \{x : x > 0\}$. Am linken Rand hat f den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$. Die erste Ableitung ist $f'(x) = \ln x + 1$. f hat daher ein lokales Minimum bei $x_0 = e^{-1}$ mit $f(1/e) = -1/e$. Es gilt $f''(x) = 1/x > 0$ für $x > 0$. Daher ist die Funktion konvex. Der Wertebereich ist $W(f) = [-1/e, \infty)$.

(b) Sei $H_n(t) = 1/(1 + t^{-n})$ mit $D(H_n) = (0, \infty)$ die *Hill-Funktion* mit dem Exponenten $n > 0$. Dann ist $H_n'(t) = nt^{-n-1}/(1+t^{-n})^2 \geq 0$, d. h., $H_n(t)$ wächst streng monoton von $\lim\limits_{t \to 0} H_n(t) = 0$ auf $\lim\limits_{t \to \infty} H_n(t) = 1$. Bei $t = 1$ erreicht $H_n(t)$ den halben Maximalwert, $H_n(1) = 1/2$.

(c) Das Morsepotential ist gegeben durch $V(r) = E \cdot \left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$, wobei E die Bindungsenergie und r_0 der Gleichgewichtsabstand für ein zweiatomiges Molekül ist (vgl. Wikipedia). Der Definitionsbereich ist $D(r) = \{r : r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ (da Abstände aus physikalischen Gründen positiv sind). Für $r \to \infty$ ist $\lim_{r \to \infty} V(r) = E$. Aus $1 = e^{-a(r-r_0)}$ erhalten wir die (doppelte) Nullstelle $r = r_0$. Ableiten liefert $V'(r) = 2E \cdot (1 - e^{-a(r-r_0)})(ae^{-a(r-r_0)})$, also ist $r = r_0$ ein kritischer Punkt. Aus $V''(r) = 2E \cdot e^{-a(r-r_0)} a^2 e^{-a(r-r_0)} + 2E \cdot (1 - e^{-a(r-r_0)}) a^2 e^{-a(r-r_0)}$ folgt $V''(r_0) = 2Ea^2 > 0$, folglich hat das Potential in $r = r_0$ ein lokales Minimum. Der Wertebereich von V ist $W(V) = [0, 1) \cup [0, E \cdot (1 - e^{ar_0})^2]$. Abbildung 3.7 zeigt das Morsepotential für $E = 1$, $r_0 = 1$ und $a = \frac{1}{2}$ und $a = 1$.

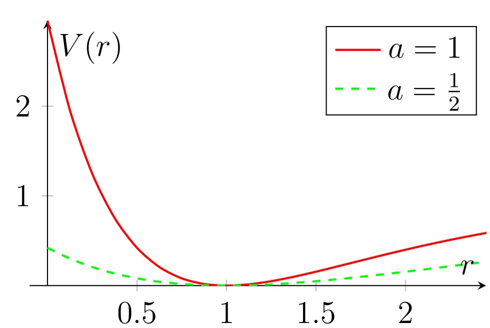


Abbildung 3.7: Morsepotential $V(r) = (1 - e^{-a \cdot (r-1)})^2$

3.7 Entwickeln von Funktionen in Taylorreihen

Wir verwenden im folgenden bereits Integrale, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, weil Differential- und Integralrechnung eng miteinander verwoben und daher schlecht getrennt behandelbar sind.

Beispiel 3.48. Was ergibt sich, wenn man 1 n-mal integriert? An

$$\int 1\,dh = h, \quad \int h\,dh = \frac{1}{2}h^2, \quad \int \frac{1}{2}h^2\,dh = \frac{1}{3!}h^3, \quad \int \frac{1}{3!}h^3\,dh = \frac{1}{4!}h^4, \ldots$$

erkennt man die allgemeine Form, $\frac{1}{n!}h^n$ mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Lemma 3.49 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $g(x)$ stetig in $[a, b]$ und $I = \int_a^b g(x)\,dx$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $(b - a)g(\xi) = I$.

Beweis. Da $g(t)$ stetig ist, nimmt es nach Satz 3.28 Minimum $g(\underline{t})$ und Maximum $g(\bar{t})$ für $\underline{t}, \bar{t} \in [a, b]$ an, d. h., es gilt $g(\underline{t}) \le g(t) \le g(\bar{t})$ für alle $t \in [a, b]$.

Setze $F(t) = \int_a^b g(x) - g(t)\,dx$. Da $F(t)$ stetig ist und $F(\bar{t}) \le 0$ und $F(\underline{t}) \ge 0$, hat $F(t)$ eine Nullstelle ξ zwischen $\underline{t}$ und $\bar{t}$ und es gilt

$$\int_a^b g(x)\,dx = (b - a)g(\xi) \quad \text{für ein} \quad \xi \in [a, b].$$

□

Satz 3.50 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $f(x)$ in $[a, b]$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich, wenn wir auf den Hauptsatz der Integralrechnung

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt \tag{3.2}$$

den Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $g(t) := f'(t)$ anwenden. □

Satz 3.51 (Taylorentwicklung). *Sei $f(t)$ für $t \in [x, x + h]$ $(n + 1)$-mal differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in [x, x + h]$ mit*

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{3!}h^3f'''(x)+\cdots+\frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(x)+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi).$$

Beweis. Für $n = 0$ ist das der Mittelwertsatz. Für $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t_1)\,dt_1 \\ &= f(x) + \int_x^{x+h} \left(f'(x) + \int_x^{t_1} f''(t_2)\,dt_2 \right) dt_1 \\ &= f(x) + \int_x^{x+h} (f'(x) + f''(\xi)(t_1 - x))\,dt_1 \\ &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!} h^2 f''(\xi). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Für $n > 1$ wendet man (3.2) in (3.3) wiederholt an, d. h., man ersetzt $f''(t_2)$ durch $f''(x) + \int_x^{t_2} f'''(t_3)\,dt_3$ usw. □

Das Polynom $T_n(h) := f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \cdots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x)$ heißt *Taylorpolynom* an $f(x)$ an der Stelle x vom Grad n. Der Term $\frac{1}{(n+1)!}h^{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi)$ heißt *Restglied von Lagrange*. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) = 0$, z. B., wenn alle Ableitungen beschränkt sind, so konvergiert die *Taylorreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k f^{(k)}(x)$ an der Stelle x (für dieses h).

Ersetzt man in Satz 3.51 formal x durch x_0 und h durch $x - x_0$, so ergibt sich die äquivalente Form der Taylorentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^n f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x].$$

Beispiel 3.52 (Taylorreihen).

(i) Alle Ableitungen von e^x an der Stelle $x_0 = 0$ sind 1, also ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

siehe auch Beispiel 1.5. Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{C}$. Definiert man den Operator hD durch $(hD) \cdot f := hf'(x)$, so lässt sich jede Taylorreihe sehr kompakt als $f(x+h) = (e^{hD}) \cdot f$ schreiben.

(ii) Für $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, usw. Somit ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

und analog

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{C}$.

(iii) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Mit $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, ..., $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$ folgt

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$, und sie divergiert für $|x| \geq 1$.

Für die endliche geometrische Summe ergibt sich (Übungsaufgabe)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

(iv) Integriert man $1/(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k$ gliedweise, erhält man

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \quad \text{für} \quad |x| < 1,$$

und speziell $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots$. Diese Reihe konvergiert sehr langsam, da das Argument nicht in der Nähe des Entwicklungspunkt 1 liegt. Nutzt man die Identität $\ln(2) = \ln(4/3) - \ln(2/3)$ so erhält man

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) = 2 \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k \cdot 3^k}.$$

(v) Integriert man $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$ gliedweise, so ergibt sich die Reihe

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Damit kann man $\pi = 4 \arctan(1)$ berechnen.

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe. Taylorreihen sind Potenzreihen, die formal über eine unendliche Summe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eingeführt werden. Dabei heißt x_0 *Entwicklungspunkt.* Im Falle einer Taylorreihe (entwickelt in x_0) gilt $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. Eine wichtige Frage ist, für welche x die Funktion $P(x)$ endlich ist.

Satz 3.53 (Quotientenkriterium)**.** *Klingen die Koeffizienten einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = r$$

ab, so ist $P(x)$ für alle x mit $|x - x_0| < r$ endlich. Dabei heißt r Konvergenzradius *der Reihe.*

Beweis. Sei $h = (x - x_0)$ mit $|h| < r$. Dann ist

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k h^k| < C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{r^k} < C \frac{1}{1 - |h|/r}.$$

□

Satz 3.54 (Wurzelkriterium). *Die Potenzreihe konvergiert für $|x - x_0| < r$ mit*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Beweis. Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Wurzelkriterium`. □

Bemerkung 3.55.

(i) Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium.

(ii) Eine Potenzreihe divergiert, wenn $|x - x_0| > r$ ist. Für $|x - x_0| = r$ liefern Quotienten- und Wurzelkriterium keine Aussage.

3.8 Berechnung von Nullstellen mit dem Newton-Verfahren

Oft ist es nicht möglich, Gleichungen $f(x) = 0$ nach x umzustellen. Man versucht dann, ausgehend von einer Anfangsnäherung x_0, eine Folge von immer besseren Näherungslösungen x_k zu finden. Dazu kann man in dem Nullstellenproblem $f(x) = 0$ die Funktion f durch ihre Taylorreihe ersetzen und diese nach dem zweiten Glied abbrechen. Man erhält das approximierende Problem $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \stackrel{!}{=} 0$ und durch Umstellen $x - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$ (Skizze). Daraus ergibt sich die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Beispiel 3.56 (Berechnung von $\sqrt{a}$, Heron-Verfahren). Wir lösen $f(x) = x^2 - a = 0$. Mit $f'(x) = 2x$ erhalten wir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Mit $a = 2$ und $x_0 = 1$ erhält man die Folge $x_1 = \underline{1}.5$, $x_2 = \underline{1.41}66666$, $x_3 = \underline{1.41421}568627$, $x_4 = \underline{1.41421356237}468$, $x_5 = \underline{1.41421356237309}49$. Die Anzahl der korrekten Ziffern verdoppelt sich (in diesem Beispiel und typischerweise bei einfachen Nullstellen) in jedem Schritt.

3.9 Integralrechnung für Funktionen in einer reellen Variablen

Definition 3.57. Sei $f(x)$ eine stückweise stetige Funktion. Dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)h, \quad h = (b - a)/n$$

bestimmtes Integral und wird geschrieben als $\int_a^b f(x)\,dx$.

Für bestimmte Integrale gelten die folgenden Rechenregeln:

(i) Linearität:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

(ii) Intervalladditivität:

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

(iii) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

Definition 3.58 (Stammfunktion oder unbestimmtes Integral). Sei $f(x)$ gegeben. Eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heißt *unbestimmtes Integral* oder *Stammfunktion* von $f(x)$.

Satz 3.59. *Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. (i) Dann ist auch $F(x)+C$ eine Stammfunktion. (ii) Sei auch $G(x)$ eine Stammfunktion. Dann gilt $G(x) = F(x) + C$.*

Beweis. (i) $(F(x) + C)' = f(x)$. (ii) $(G(x) - F(x))' = 0$, also ist $G(x) - F(x)$ konstant. □

Satz 3.60 (Hauptsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion und sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beweis. Setze $G(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ und bestimme $G'(x)$. Mit der Intervalladditivität gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(x).$$

Somit ist $G(x)$ eine Stammfunktion. Aus $(F(x) - G(x))' = 0$ folgt weiter $F(x) = G(x) + C$ und schließlich $F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) = \int_a^b f(x)\, dx$. □

Einige Grundintegrale (Beweis jeweils durch Ableiten):

$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ für $n \neq -1$

$\int 1/x\, dx = \ln |x| + C$

$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$, $a \neq 0$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{arsinh} x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C$

Beispiel 3.61.

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C = \ln \sqrt{x^2+1} + C$$

Durch Umkehrung der Kettenregel erhält man die Substitutionsregel

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \text{mit} \quad x = \varphi(t). \tag{3.4}$$

Beweis. Sei $f(x) = F'(x)$. Integrieren wir die Kettenregel $\frac{d}{dt}F(x(t)) = f(x(t))x'(t)$ unbestimmt über dt, so ergibt sich nach dem Hauptsatz $F(x(t)) = \int f(x(t))x'(t)\,dt$+C.

□

Beispiel 3.62. In $\int \sin(3x-4)\,dx$ setzen wir $t = 3x-4$ und $dx = \frac{1}{3}dt$.

$$\int \sin(3x-4)\,dx = \int \sin t \frac{1}{3}\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-4) + C$$

Analog, mit $t = 2x+1$, $dx = \frac{1}{2}dt$,

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{3}\,(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Im dritten Beispiel ist $t = \sqrt{x}$, also $dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+t}2t\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt = 2\ln|t+1| + C = \ln|\sqrt{x}+1|^2 + C.$$

Satz 3.63 (Partielle Integration)**.** *Seien $u'(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen. Dann gilt*

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx.$$

Beweis. Produktregel umstellen und integrieren. □

Beispiel 3.64.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

oder alternativ mit Substitution $t = \ln x$:

$$\int \ln x\,dx = \int te^t\,dt = (t-1)e^t + C = (\ln x - 1)x + C$$

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\,(e^x(\sin x - \cos x)) + C$$

alternativ über komplexe Zahlen

$$\int e^x\sin x\,dx = \operatorname{Im}\int e^{x(1+i)}\,dx = \operatorname{Im}\underbrace{\frac{1}{1+i}}_{\frac{1-i}{2}}e^xe^{ix} + C = \frac{1}{2}\,(e^x(\sin x - \cos x)) + C$$

□

Bemerkung 3.65. Die Integration von einfachen Funktionen kann schwierig sein; viele Funktionen lassen sich gar nicht geschlossen integrieren, z. B. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ oder $\int e^{-x^2}\,dx$. Da diese Integrale aber für manche Anwendungen sehr wichtig sind, führt man neue Funktionen ein, die durch das Integral festgelegt werden (z. B. Stichworte „Integralsinus“ und „Fehlerfunktion“). □

Integration rationaler Funktionen

Integrale von rationalen Funktionen der Form $\int p(x)/q(x)\,dx$ mit teilerfremden reellen Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ lassen sich stets geschlossen integrieren. Mit Hilfe von Polynomdivision und Partialbruchzerlegung wird die Integration systematisch auf folgende fünf **Grundtypen** zurückgeführt:

(i) $\displaystyle\int \text{Polynom}\,dx = \text{Polynom}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C,\ k>1$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \ln|(x-a)^2+b^2| + C$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{1/b^2}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx$. Mit der Substitution $t=(x-a)/b$ und $dx = b\,dt$ wird daraus $\displaystyle\frac{1}{b}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$.

Beispiel 3.66. Mit Computerhilfe erhält man

$$\int (x^5+x^2+x+1)/((x^2+4)(x-1)^3)\,dx =$$
$$\frac{1}{250}\left(184\ln\left(x^2+4\right) + 250x - \frac{320}{x-1} - \frac{100}{(x-1)^2} + 382\ln(x-1) - 101\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Wie man sieht, entstehen viele Terme, die jedoch alle Grundtypen entsprechen. □

Den allgemeinen Fall reduziert man auf Grundtypen. Als erstes prüft man, ob eine unecht gebrochene Funktion mit $\operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(q)$ vorliegt. Wenn ja, so führt man eine Polynomdivision

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{Polynom} + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$ durch und rechnet dann mit $\frac{r(x)}{q(x)}$ weiter. Für die anschließende **Partialbruchzerlegung** von $\frac{p(x)}{q(x)}$ bestimmt man alle Nullstellen von $q(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$ und unterscheidet dann die folgenden Fälle:

(a) Sei a eine einfache Nullstelle von $q(x)$, d. h., $q(x) = (x-a)R(x)$ mit einem Rest $R(x)$ vom Grad $n-1$. Dann gilt
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B(x)}{R(x)},$$
mit eindeutig bestimmtem A und $B(x)$.

(b) Sei a reelle und k-fache Nullstelle von $q(x)$, d. h., $q(x) = (x-a)^k R(x)$. Dann sind die Polynome $A(x)$ und $B(x)$ mit $\operatorname{grad}(A(x)) < k$ und $\operatorname{grad}(B(x)) = \operatorname{grad}(p(x)) - k$
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A(x)}{(x-a)^k} + \frac{B(x)}{R(x)}$$
eindeutig bestimmt.

(c) Sei a komplexe und einfache Nullstelle von $q(x)$. Dann ist auch $\bar{a}$ Nullstelle von $q(x)$ (Beweis: Es gilt $\overline{q(\operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a))} = q(\operatorname{Re}(a) - i\operatorname{Im}(a)) = 0$). Also ist $q(x) = (x-a)(x-\bar{a})R(x) = (x^2 + C_1 x + C_0)R(x)$ mit $C_1 = -2\operatorname{Re}(a)$ und $C_0 = |a|^2$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist nun
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2 + C_1 x + C_0} + \frac{B(x)}{R(x)}.$$

(d) Sei a komplexe und k-fache Nullstelle von $q(x)$. Das führt auf
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A(x)}{(x^2 + C_1 x + C_0)^k} + \frac{B(x)}{R(x)}.$$
mit $\operatorname{grad}(A(x)) < 2k$.

Die Fälle (c) und (d) können alternativ wie (a) und (b), nur mit komplexen Zahlen, behandelt werden. So ist z. B.
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{i}{2}\int \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right) dx = \frac{i}{2}\left(\ln(x+i) - \ln(x-i)\right) + C = \arctan(x) + C.$$

Satz 3.67 (Existenz der Partialbruchzerlegung, Abspalten einer k-fachen Nullstelle)**.** *Sei $p(x)/q(x)$ echt gebrochen, $p(x)$ und $q(x)$ teilerfremd und a eine k-fache ($k \geq 1$) reelle oder komplexe Nullstelle von $q(x)$. Dann gibt es ein $A \in \mathbb{C}$ und Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ mit*
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{Q(x)}$$
mit $\operatorname{grad}(Q(x)) < \operatorname{grad}(q(x))$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $q(x) = (x-a)^k r(x)$ mit $r(a) \neq 0$. Somit gilt
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a)^k r(x)} = \frac{p(a)/r(a)}{(x-a)^k} + \frac{p(x) - r(x)p(a)/r(a)}{(x-a)^k r(x)}.$$
Da der Zähler des zweiten Summanden für $x = a$ verschwindet, kann $(x-a)$ mindestens einmal gekürzt werden. Mit $A = p(a)/r(a)$ folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe dieses konstruktiven Beweises können wir Partialbruchzerlegungen ausrechnen.

Beispiel 3.68 (einfache, reelle Nullstelle).

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}. \tag{3.5}$$

Dann ist

$$A = \left.\frac{x+2}{(x-1)}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B = \left.\frac{x+2}{(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}.$$

Beispiel 3.69 (doppelte Nullstelle). Aus dem Ansatz

$$\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}$$

erhält man durch Multiplikation mit $x+2$ und Betrachten von $x=-2$

$$A = \left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=-2} = \frac{1}{4}.$$

Durch Multiplikation mit x^2 findet man

$$\frac{1}{x+2} = B + xC + x^2(\dots),$$

also

$$B = \left.\frac{1}{x+2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}, \quad \text{und} \quad C = \left.\left(\frac{1}{x+2}\right)'\right|_{x=0} = -\left.\frac{1}{(x+2)^2}\right|_{x=0} = -\frac{1}{4}.$$

Beispiel 3.70. Im folgenden Beispiel wird der Zähler auf die Grundtypen 4 und 5 aufgeteilt.

$$\begin{aligned}\int \frac{3(x+1)-5}{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ = \frac{3}{2}\ln|(x+1)^2+1| - 5\arctan(x+1) + C\end{aligned}$$

Bemerkung 3.71. Die Partialbruchzerlegung ist eindeutig. Sei $f(x) = p(x)/q(x)$. Der Koeffizient von $(x-a)^{-l}$, wenn a eine k-fache Nullstelle von $q(x)$ ist, ist gerade

$$A = \left.\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} f(x)(x-a)^k/l!\right|_{x=a}.$$

Uneigentliche Integrale

Wir unterscheiden zwei Arten von uneigentlichen Integralen: zum einen Integrale, bei denen Intervallgrenzen unendlich sind, z. B. die obere

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

und zum anderen Integrale, bei denen der Integrand im Inneren des Integrationsgebietes unbeschränkt ist, z. B. an einer Stelle ξ (vgl. Skizze). Dann definiert man das Integral durch den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{\xi-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\xi+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

Man sagt, ein uneigentliches Integral *ist konvergent*, wenn der Grenzwert existiert und endlich ist.

Beispiel 3.72.

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty 1/x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b 1/x\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty\\
&\int_1^\infty 1/x^3\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b 1/x^3\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_1^b = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}\\
&\int_{-1}^1 1/x^2 = 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 1/x^2\,dx = 2\lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_\epsilon^1 = \infty\\
&\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = 2
\end{aligned}$$

Es ist nicht immer leicht zu entscheiden, ob ein uneigentliches Integral existiert.

Beispiel 3.73 (Gammafunktion). Will man statistisch prüfen, ob zwei normalverteilte Zufallsgrößen den gleichen Erwartungswert haben (t-Test), so benötigt man die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Für $x = 1$ erhalten wir $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$. Mit partieller Integration kann x um eins reduziert werden, es gilt

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = -t^{x-1}e^{-t}\big|_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt,$$

also

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Mit dieser Rekursionsformel erhält man $\Gamma(x) = (x-1)!$ für $x \in \mathbb{N}$. Die Gammafunktion hat viele interessante Eigenschaften, z. B.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Daraus folgt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Mit Hilfe dieses Wertes können wir die Fläche

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

unter der Gaußschen Glockenkurve für $x \to \infty$ bestimmen.

Aufgrund der Symmetrie ist

$$F(\infty) = 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Mit der Substitution $t = \sqrt{2z}$ und $dt = \frac{1}{\sqrt{2z}} dz$ folgt

$$F(\infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-z} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{1}{2}-1}\, dz = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Im Tafelwerk findet man die Werte von $F(x)$ als Quantile der Normalverteilung. Z. B. ist $F(1) = 0.8413$ und $F(2) = 0.97725$ (das bedeutet, dass bei normalverteilten Zufallsgrößen weniger als 3% aller Realisierungen oberhalb der doppelten Standardabweichung vom Mittelwert entfernt liegen sollten, vgl. Skizze). □

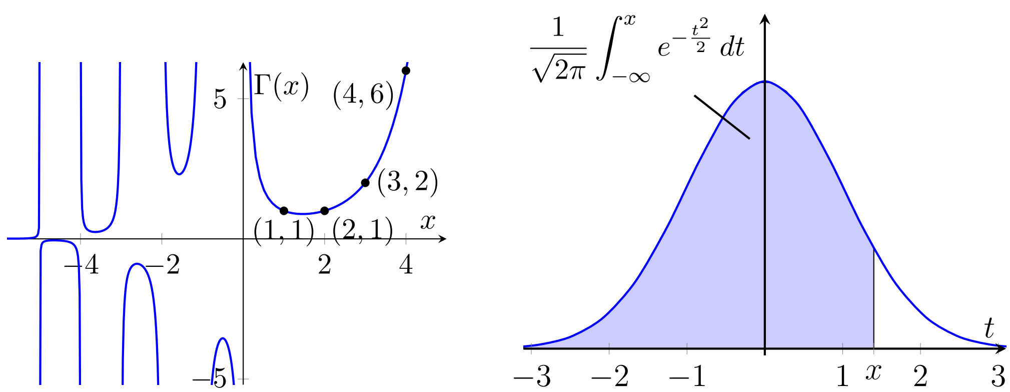


Abbildung 3.8: Gammafunktion und Gaußsche Glockenkurve

Beispiel 3.74 (Divergenz der harmonischen Reihe). Sei $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. Nach Abbildung 3.9 ist

$$H_n > \int_0^n \frac{1}{x+1}\, dx = \ln(1+x)\big|_0^n = \ln(n+1),$$

also $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$. Genauer: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n - \ln(n) = 0.577215\ldots$ (Euler-Macheroni-Konstante).

Sei $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Dann ist $S_n < 1 + 1/4 + \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1.75$. (ohne Beweis: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$).

Satz 3.75 (Riemannsche Vermutung). *Sei* $\zeta(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$ *die Riemannsche Zetafunktion. Dann gilt (i)* $\zeta(z) = \prod\limits_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-z}}$ *und (ii)* $\zeta(z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ *oder* $z = -2k$ *mit* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Teil (i) folgt mit der geometrischen Reihe und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Aussage (ii) ist unbewiesen, obwohl das Problem bereits 1859 formuliert wurde. □

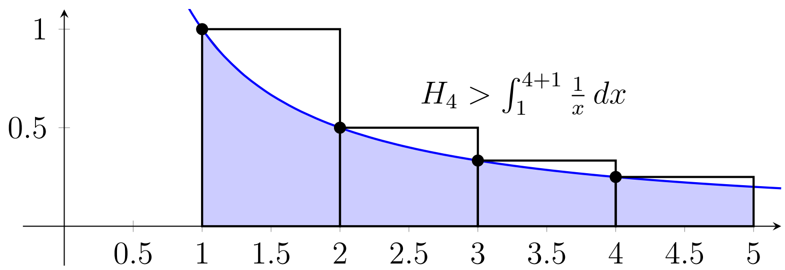


Abbildung 3.9: Die harmonische Reihe divergiert, weil $\int_1^{n+1} 1/x\,dx$ eine untere Schranke ist.

3.10 Numerische Berechnung von Integralen

Gesucht ist $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Lässt sich eine Stammfunktion $F(x)$ finden, so gilt mit dem Hauptsatz der Integralrechnung $I = F(b) - F(a)$. Alternativ kann I durch eine Quadraturformel approximiert werden. Im Folgenden ist $h = (b-a)/n$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Trapezregel} & T_1 = (b-a)\left(\dfrac{1}{2}f(a) + \dfrac{1}{2}f(b)\right) \\
\text{Trapezsumme} & T_n = \dfrac{h}{2}f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} hf(a+hk) + \dfrac{h}{2}f(b) \\
\text{Fassregel} & F_1 = \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\dfrac{a+b}{2}) + f(b)\right) \\
\text{Simpsonregel} & F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{h}{6}\left(f(a_k) + 4f(a_k + h/2) + f(a_k+h)\right), \quad a_k = a + kh
\end{array}$$

Beispiel 3.76. Vergleich $\int_0^1 1/(1+x^2)\,dx = \arctan(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ mit Tabelle 3.1. □

Tabelle 3.1: Numerische Quadratur von $\int_0^1 1/(1+x^2)\,dx$

Trapezregel	Simpsonregel
$T_1 = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = \underline{0.7}5$	$F_1 = \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{47}{60} = \underline{0.78}33$
$T_2 = \frac{31}{40} = \underline{0.7}75$	$F_2 = \frac{8011}{10200} = \underline{0.7853}921$
$T_4 = \frac{919}{1174} = \underline{0.78}2794$	$F_4 = \underline{0.7853981}256146$
$T_{10} = \underline{0.784}98149$	$F_{10} = \underline{0.78539816}32424$
$T_{100} = \underline{0.78539}399673$	$F_{100} = \underline{0.785398163397448}$

Bemerkung 3.77. Die Fehler für die Trapezsumme und Simpsonregel kann man abschätzen:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - F_n\right| \le \frac{(b-a)h^4}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \qquad \square$$

3.11 Anwendungen der Integralrechnung

Flächenberechnungen

(a) Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$, Skizze, Schnittpunkte A und B berechnen und dann $F = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ berechnen

(b) Fläche unter einer Kurve $f(x)$ in Parameterdarstellung, $y = y(t), x = x(t)$ mit $t \in [0, T]$. Mit Hilfe der Substitutionsregel erhält man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^T y(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Beispiel 3.78 (Fläche unter der Zykloide). Mit $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ und $\dot{x}(t) = 1 - \cos t$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b y(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} y(x(t))\dot{x}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\,dt = \left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}(\cos t \sin t + t)\right]_0^{2\pi} = 3\pi\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir partielle Integration und $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$ für

$$\begin{aligned}&\int \cos^2 t\,dt = \cos t \sin t + \int \sin^2 t\,dt = \cos t \sin t + \int (1 - \cos^2 t)\,dt, \\ \Longrightarrow \quad &\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t) + C.\end{aligned}$$

Alternativ kann man das Integral auch durch den Weg über die komplexen Zahlen bestimmen, vgl. Beispiel 2.18, aus $\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$ folgt

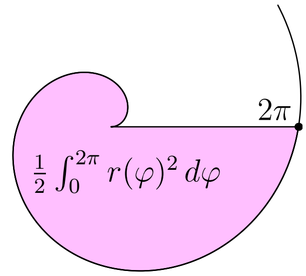
$$\int (\cos(t))^2\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + 1\right)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right).$$

(c) Fläche von Funktionen in Polarkoordinaten. Die Fläche eines Kreissektors mit Radius R ist $F \approx \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)R^2$. Grenzwertbildung liefert

$$F = \frac{1}{2}\int r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

Beispiel 3.79. Fläche einer arithmetischen Spirale. Es gilt $r(\varphi) = \varphi$. Also ist

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{6}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3.$$



□

Kurvenlängen

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$$

In Parameterdarstellung ergibt sich

$$L = \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt.$$

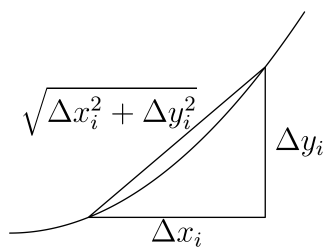


Abbildung 3.10: Berechnung von Kurvenlängen

Beispiel 3.80. (a) Kreis. Mit $x = r\cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ folgt

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = 2r\pi$$

(b) Ellipse. Sei $x = a\cos t$ und $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ mit $a > b$. Das Integral

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a \sin^2 t + b \cos^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2} \, dt$$

ist ein sogenanntes *elliptisches Integral* und kann nicht geschlossen berechnet werden.

(c) Zykloide. Sei $x = t - \sin t$ und $y = 1 - \cos t$. Die Länge der Zykloide für $t \in [0, 2\pi]$ ist dann

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = 2 \cdot \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt.$$

Mit der Substitution $z = \cos t$, also $t = \arccos z$ und $dt = -1/\sqrt{1-z^2}dz$ erhält man

$$L = 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{1-z^2}}\,dz = 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1}(1+z)^{-\frac{1}{2}}\,dz = 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\,(1+z)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 8.$$

Volumenberechnung

Durch das Aufsummieren kreisförmiger Querschnitte erhält man das Volumen eines Rotationskörpers. Für die Rotation um die x-Achse ergibt sich $V = \pi\int_a^b y(x)^2\,dx$ und bei Rotation um die y-Achse $V = \pi\int_a^b x(y)^2\,dy$, vgl. Abbildung 3.11.

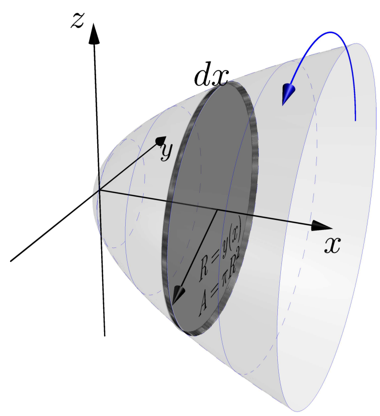


Abbildung 3.11: Eine Funktion $y(x)$ rotiert um die x-Achse. Das Volumen ergibt sich durch Summation von zylindrischen Scheiben der Breite dx. Es gilt $V = \pi\int_a^b y(x)^2\,dx$.

Beispiel 3.81. (a) Rotation der Parabel $y = x^2+1$ um die y-Achse. Dann ist $x^2 = y-1$.

$$V = \pi\int_1^5 x^2\,dy = \pi\int_1^5 (y-1)\,dy = \pi\left[y^2/2 - y\right]_1^5 = 8\pi$$

(b) $y = x^2+1$, Rotation um x-Achse.

$$V = \int_0^1 \pi(x^2+1)^2\,dx = \pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \tfrac{28}{15}\pi$$

(c) Volumen einer Einheitskugel 1. Idee: 8 Oktanten:

$$V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

2. Idee: die Kugel entsteht durch Rotation einer Kreislinie um die x-Achse:

$$V = \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi\left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \tfrac{4}{3}\pi$$

3.12 Lösung einfacher Differentialgleichungen

Gegeben ist eine Gleichung, in der eine Funktion $y(t)$ zusammen mit ihrer Ableitung $y'(t)$ vorkommt. Dabei kann $y(t)$ aus mehreren Komponenten bestehen, also ein Vektor sein. Naturgesetze werden oft als Differentialgleichungen beschrieben.

Beispiel 3.82. (a) Feder. Federkraft ist $-ky$. Newtonsche Bewegungsgleichungen $F = ma(t)$ mit $a(t) = y''(t)$. Daraus erhält man die Differentialgleichung des *harmonischen Oszillators*

$$my''(t) = -ky(t). \tag{3.6}$$

Die Lösung ist $y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

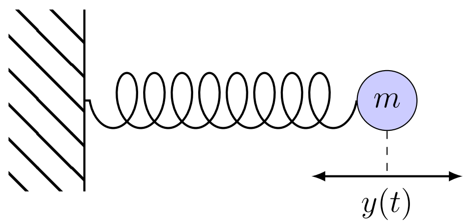


Abbildung 3.12: Feder

(b) Mathematisches Pendel der Länge L. Skizze. Die wirkende Kraft ist $F = -\sin(\alpha)mg$. Man erhält $\alpha'' = -\sin(\alpha)g/L$. Für kleine Auslenkungen ist $\sin(\alpha) \approx \alpha$, also $\alpha'' = -g\alpha/L$.

(c) Logistisches Wachstum. Die Größe $y(t)$ einer Population (z. B. Bakterien) kann näherungsweise durch die logistische Differentialgleichung

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

beschrieben werden. Dabei ist k die Wachstumsrate und K die Sättigungskonzentration K, vgl. Abbildung 3.13.

(d) Reaktionskinetik. Für die chemische Reaktion $2A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} A_2B$ sei $y_1(t) = [A]$, $y_2(t) = [B]$ und $y_3(t) = [A_2B]$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1' &= -2k_1 y_1^2 y_2 + 2k_2 y_3 \\ y_2' &= -k_1 y_1^2 y_2 + k_2 y_3 \\ y_3' &= k_1 y_1^2 y_2 - k_2 y_3. \end{aligned}$$

Im stationären Zustand sind die Zeitableitungen null, und man erhält das Massenwirkungsgesetz:

$$\frac{y_3}{y_1^2 y_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

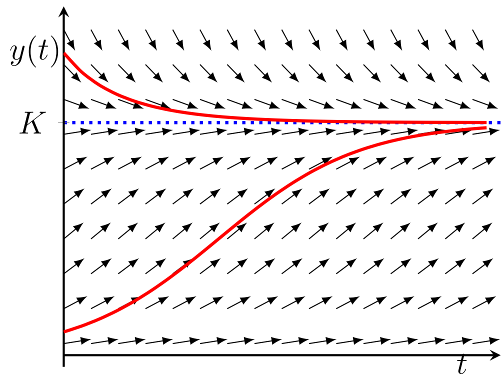


Abbildung 3.13: Logistisches Wachstum

Trennung der Variablen

Differentialgleichungen in Produktform

$$y'(t) = a(t)f(y(t))$$

können durch *Trennung der Variablen* gelöst werden. Dazu schreibt man $y'(t)$ als dy/dt und stellt formal um

$$\frac{dy}{f(y)} = a(t)\,dt.$$

Integriert man diese Gleichung auf beiden Seiten unbestimmt, erhält man einen impliziten Ausdruck für die Lösung y, den man in einem zweiten Schritt anschließend nach y auflösen kann. Wenn $f(y)$ eine Nullstelle y_0 hat, ist $y(t) \equiv y_0$ eine weitere Lösung.

Beispiel 3.83. (a)

$$y' = -\frac{y}{t} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{t}\,dt$$

Also

$$\ln|y| = -\ln|t| + C \Rightarrow y(t) = \widetilde{C}/t,$$

mit $\widetilde{C} = \pm e^C$.

Probe:

$$\left(\widetilde{C}/t\right)' = -\widetilde{C}t^{-2} \overset{?}{=} -(\widetilde{C}/t)/t \quad \checkmark$$

(b) Logistisches Wachstum. $y' = y \cdot (1 - y/K)$

$$\int \frac{dy}{y \cdot (1 - y/K)} = \int dt = t + C$$

Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{K}{y \cdot (K - y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}$$

und $0 < y < K$ erhalten wir

$$\ln|y| - \ln|K-y| = \ln\left(\frac{y}{K-y}\right) = t + C$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y}{K-y} = \widetilde{C}e^t \quad \Longrightarrow \quad y(t) = K\frac{\widetilde{C}e^t}{\widetilde{C}e^t + 1}.$$

(c) Wir suchen die Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1-t^2}{ty}.$$

Zuerst trennen wir die Variablen

$$\int y\,dy = \int \frac{1-t^2}{t}\,dt,$$

und dann integrieren wir

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Also ist $y(t) = \pm\sqrt{2\ln t - t^2 + \widetilde{C}}$. Probe:

$$y'(t) = \frac{1}{2}\frac{\left(2\ln t - t^2 + \widetilde{C}\right)'}{\sqrt{2\ln t - t^2 + \widetilde{C}}} = \frac{1}{2}\frac{2\frac{1}{t} - 2t}{y} \overset{\checkmark}{=} \frac{1-t^2}{ty}$$

Lineare, skalare Differentialgleichungen, $y' = a(t)y(t) + b(t)$

Lineare, inhomogene Probleme löst man in zwei Schritten: Zuerst berechnet man die Lösung des homogenen Problems und verwendet diese dann anschließend um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu finden. Die Lösungsstruktur ist

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{allgemeine Lösung}\\ \text{des inhomogenen}\\ \text{Problems}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{spezielle Lösung des}\\ \text{inhomogenen}\\ \text{Problems}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{allgemeine Lösung des}\\ \text{homogenen Problems}\end{array}}$$

Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung $y_h'(t) = a(t)y_h(t)$. Mit $y_h' = \frac{dy_h}{dt}$ erhält man durch Trennung der Variablen die Gleichung

$$\frac{dy_h}{y_h} = a(t)\,dt$$

und anschließende Integration

$$\ln|y_h(t)| = \int a(t)\,dt + \widetilde{C},$$

also ist $y_h(t) = C\exp(\int a(t)\,dt)$ allgemeine Lösung des homogenen Problems mit $C = \pm\exp(\widetilde{C})$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

suchen wir bei der „Variation der Konstanten“ in der Form $y(t) = C(t)y_h(t)$. Wegen

$$y'(t) = C'(t)y_h(t) + C(t)y_h'(t) \overset{!}{=} a(t)y(t) + b(t), \quad \text{also} \quad C'(t)y_h(t) = b(t).$$

erhält man $C(t)$ durch Integration

$$C(t) = \int \frac{b(t)}{y_h(t)}\,dt$$

und eine spezielle Lösung $y_{\mathrm{sp}}(t)$ des inhomogenen Problems. Die allgemeine Lösung ist dann $y(t) = y_{\mathrm{sp}}(t) + y_h(t)$.

Beispiel 3.84. (a) Differentialgleichung $y' = y - t^2 + 2t$: Die homogene Gleichung $y_h' = y_h$ hat die Lösung $y_h = e^t$, daher lautet der Ansatz

$$y(t) = C(t)e^t.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$y' = C'e^t + Ce^t \overset{!}{=} Ce^t - t^2 + 2t, \quad \text{also} \quad C' = e^{-t}(-t^2 + 2t).$$

Mit

$$C(t) = \int e^{-t}(-t^2 + 2t)\,dt = e^{-t}t^2 + C$$

erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \left(e^{-t}t^2 + C\right)e^t = t^2 + Ce^t.$$

Zur Probe leiten wir ab und setzen ein:

$$y' = 2t + Ce^t \overset{?}{=} t^2 + Ce^t - t^2 + 2t \quad \checkmark$$

(b) Wir suchen die Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{t}y + 3t, \quad t > 0.$$

Dabei sei zusätzlich ein Anfangswert $y(1) = \frac{3}{2}$ vorgegeben. Die Lösung der homogenen Gleichung $y_h' = -\frac{1}{t}y_h$ erhalten wir durch Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \frac{1}{t}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|y_h| = -\ln|t| + C \quad \Longrightarrow \quad y_h = \frac{\widetilde{C}}{t}.$$

Variation der Konstanten liefert die Lösung für das inhomogene Problem: Sei $y = C(t)/t$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$y' = \frac{C'(t)t - C(t)}{t^2} = -\frac{1}{t}\frac{C(t)}{t} + 3t \quad \Longrightarrow \quad C'(t) = 3t^2 \quad \Longrightarrow \quad C(t) = t^3 + C$$

Somit erhalten wir die Lösungsschar $y(t) = (t^3 + C)\frac{1}{t}$ für $C \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangswertbedingung folgt nun $1 + C = \frac{3}{2}$, also $C = \frac{1}{2}$.

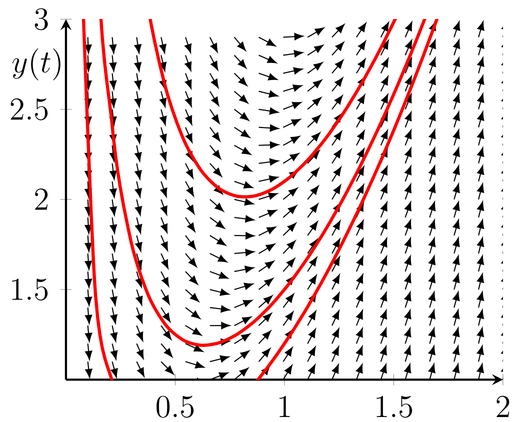


Abbildung 3.14: Lösung der Differentialgleichung $y' = -y/t + 3t$

Beispiel 3.85 (Aufnahme und Abbau eines Arzneistoffs). Wir betrachten einen Arzneistoff, der vom Magen $A(t)$ ins Blut $B(t)$ aufgenommen und anschließend abgebaut wird. Der Prozess $A \overset{k_1}{\to} B \overset{k_2}{\to} C$ wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} A'(t) &= -k_1 A(t) \\ B'(t) &= -k_2 B(t) + k_1 A(t) \\ C'(t) &= k_2 B(t) \end{aligned}$$

beschrieben. Als Anfangswerte wählen wir $A(0) = 1$, $B(0) = 0$ und $C(0) = 0$. Die Konzentration im Magen fällt exponentiell $A(t) = e^{-k_1 t}$. Für die Bestimmung von $B(t)$ verwenden wir die Variation der Konstanten, also den Ansatz $B(t) = K(t)e^{-k_2 t}$, der auf

$$K'(t) = k_1 e^{(k_2 - k_1)t}$$

führt. Für $k_1 \neq k_2$ ist $K(t) = k_1/(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)t} + K_0$, also

$$B(t) = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right).$$

Ist $k_1 = k_2 = k$, erhält man

$$B(t) = kte^{-kt}.$$

Der zweite Fall ergibt sich mit l'Hôspital auch durch einen Grenzübergang aus dem ersten, denn

$$\lim_{k_2 \to k_1} k_1 \frac{\frac{d}{dk_2}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)}{\frac{d}{dk_2}(k_2 - k_1)} = k_1 t e^{-k_1 t}.$$

Beispiel 3.86 (Berechnung von Orthogonaltrajektorien). Zur Kurvenschar $\{y(x) = C/x : C \in \mathbb{R}\}$ suchen wir eine Kurvenschar $\{u_C(x) : C \in \mathbb{R}\}$, so dass sich die Linien von $y(x)$ und $u(x)$ stets in rechten Winkeln schneiden.

Aus $y(x) = C/x$ folgt $y'(x) = -C/x^2$. Wegen $C = y(x)x$ genügt die erste Kurvenschar daher der Differentialgleichung $y' = -y/x$. Damit u senkrecht auf y steht, muss $u' = -1/y'$ gelten, d. h., die zweite Kurvenschar ist die Lösung der Differentialgleichung $u' = x/u$. Trennung der Variablen liefert $\int u\,du = \int x\,dx$, also $u(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$.

3.12.1 Fourier-Reihen

Definition 3.87. Eine $2\pi\omega$-periodische Funktion der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt *Fourier-Reihe.*

Lemma 3.88. Setzt man $\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0$, $\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ und $\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ für $k = 1, 2, \ldots,$ so erhält man die äquivalente Darstellung einer Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikwt}.$$

Definition 3.89. Für eine (stückweise) stetige Funktion $f\colon [0,T] \to \mathbb{C}$ heißt

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikwt}$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und $\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Reihe von f. Man schreibt $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$.

Satz 3.90. *Die Fourier-Reihe einer Fourier-Reihe ist sie selbst.*

Satz 3.91. *Für eine* $[0,T]$ *periodische, ungerade Funktion gilt*

$$F_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

mit $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Beispiel 3.92. Fourier-Reihe für eine Sägezahnfunktion

Beispiel 3.93. Fourier-Reihe für eine Rechteckschwingung

Kapitel 4

Differential- und Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen

Beispiel 4.1. (a) Temperatur $T(x, y, z)$ im Raum im Punkt (x, y, z), $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$.

(b) $p(T, V) = nRT/V$ der Druck als Funktion von Temperatur und Volumen, $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$.

(c) $W(x, y)$ die Windrichtung im Punkt (x, y), $W: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(d) $\psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass sich ein Elektron e_1 in (x_1, y_1, z_1) und ein Elektron e_2 in (x_2, y_2, z_2) zum Zeitpunkt t befindet. $\psi: \mathbb{R}^7 \to [0, 1]$.

Wir können allgemein Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ betrachten, die n Variablen auf Vektoren der Länge m abbilden, also $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$.

Beispiel 4.2. Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ können durch Konturbilder veranschaulicht werden:

(a) Oberharz, siehe Abbildung 4.1.

(b) Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist ein Paraboloid, die Höhenlinien sind konzentrische Kreise.

(c) Die Funktion $f(x, y) = -x - y + 2$ ist eine Ebene mit Stellungsvektor $(1, 1, 0)$ und Richtungsvektoren $(1, 0, -1)$ und $(0, 1, -1)$. Die Höhenlinien sind Geraden der Form $y = -x - h + 2$. Eine Parameterdarstellung ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine implizite Darstellung ist $x + y + z = 2$.

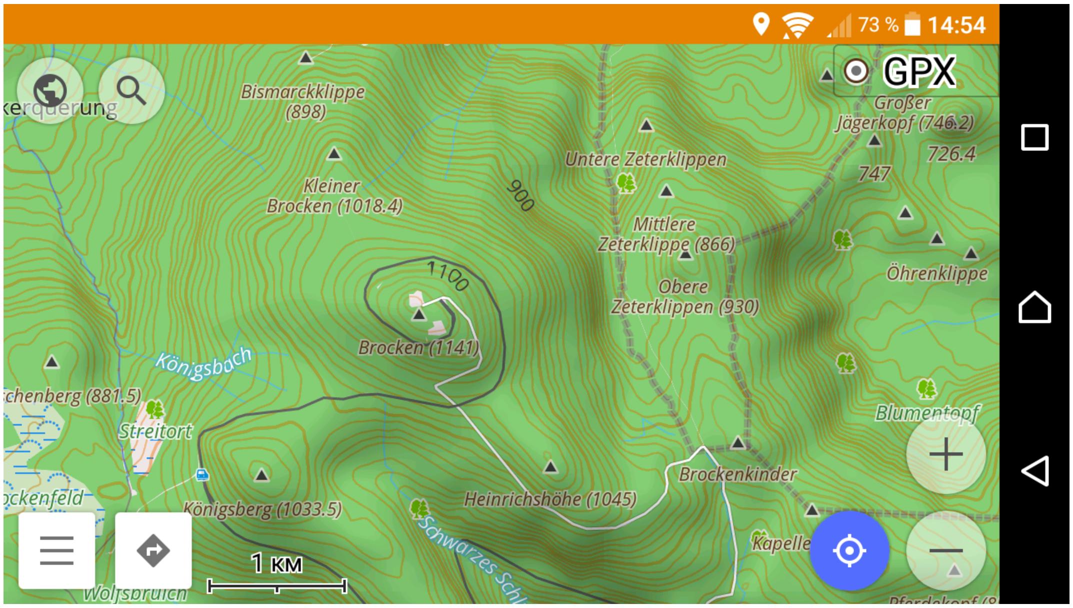


Abbildung 4.1: Darstellung der Brockengegend, Bildschirmfoto von OsmAnd `http://osmand.net`.

4.1 Partielle Ableitungen

Definition 4.3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Dann heißt

$$f_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

erste partielle Ableitung von f nach x_k.

Beispiel 4.4. Sei $f(x, y, z) = x^2 + 3y - yz$. Dann ist $f_x = 2x$, $f_y = 3 - z$ und $f_z = -y$.

Die partielle Ableitung f_{x_k} beschreibt den Anstieg von f in Richtung der x_k-Achse. Kennt man die Anstiege in Richtung der Koordinatenachsen, so kann man daraus auch Anstiege in beliebiger (schräger) Richtung bestimmen.

Definition 4.5 (Richtungsableitung). Sei $f(x, y)$ eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und sei $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Dann heißt der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial r} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hr_1, y + hr_2) - f(x, y)}{h}$$

Richtungsableitung von f in Richtung r. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} r_1 + \frac{\partial f}{\partial y} r_2.$$

Im $\mathbb{R}^n$ wird $\frac{\partial f}{\partial r}$ analog definiert, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} r_k \qquad \square$$

Beispiel 4.6. Für die Funktion $u(x,y) = x^2y + y^2$ sei die Richtungsableitung im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(2,1)$ zu bestimmen. Die ersten partiellen Ableitungen von $u(x,y)$ sind

$$u_x = 2xy \text{ und } u_y = x^2 + 2y,$$

also ist

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2xyr_1 + (x^2 + 2y)r_2 = 4 + 3 = 7.$$

Definition 4.7 (Gradient, Nabla-Operator). Der *Gradient* einer Funktion ist der Vektor der ersten partiellen Ableitungen. Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ man schreibt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T,$$

und für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert man analog

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T.$$

Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges, und er steht senkrecht auf den Höhenlinien. Skizze. Beweis später, mit Kettenregel.

Differenziert man erste partielle Ableitungen nochmals, so erhält man zweite Ableitungen. Das Zeichen ^{T} heißt *Transponieren* und soll andeuten, dass man sich den Vektor hier als Spalte vorstellt, siehe Definition 5.21.

Beispiel 4.8. Sei $f(x,y) = x^2y + e^{y/x}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f_x &= 2xy + e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\\
f_{xy} &= 2x + e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{1}{x} + e^{y/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
f_y &= x^2 + e^{y/x}\frac{1}{x}\\
f_{yx} &= 2x + e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{1}{x} + e^{y/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Satz 4.9 (Satz von Hermann Amandus Schwarz)**.** *Für (glatte) Funktionen* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sind die gemischten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge, in der abgeleitet wurde.*

Es gilt also z. B. $f_{xy} = f_{yx}$ *und* $f_{xxzy} = f_{zxyx}$.

4.2 Extremwertaufgaben für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

Wiederholung für $n = 1$: Notwendig ist $f'(x^*) = 0$, d. h. x^* ist kritischer Punkt; gilt zusätzlich $f''(x^*) < 0$ bzw. $f''(x^*) > 0$ so ist x^* ein Maximum bzw. Minimum (hinreichendes Kriterium).

Satz 4.10 (Notwendiges Kriterium)**.** *Hat eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ in ein lokales Extremum in $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, so gilt*

$$\operatorname{grad} f(x^*) = (0, \dots, 0)^T.$$

Das hinreichende Kriterium ist komplizierter als im $\mathbb{R}^1$. Erstens, weil die zweiten Ableitungen (z. B. f_{xx} und f_{yy}) unterschiedliche Vorzeichen haben können und zweitens, weil eine Funktion auch entlang „schräger Richtungen“ anders gekrümmt sein kann als in Koordinatenrichtungen. Dazu ein Beispiel.

Beispiel 4.11. Siehe Abbildung 4.2.

(a) Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ hat im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ einen *Sattel*. Es gilt $f_{xx} > 0$ und $f_{yy} < 0$, weshalb der kritische Punkt $(0, 0)$ weder Maximum noch Minimum sein kann.

(b) Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$ hat im Punkt $(0, 0)$ einen Sattel, obwohl $f_{xx} > 0$ und $f_{yy} > 0$ ist.

Satz 4.12 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)**.** *Erfüllt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ in einem Punkt (x^*, y^*) die notwendige Bedingung* $\operatorname{grad}(f) = (0, 0)^T$ *und gilt zusätzlich $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ mit $f_{xx} > 0$ ($f_{xx} < 0$), so hat f in (x^*, y^*) ein lokales Minimum (Maximum).*

Gilt für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}(f)|_{x=x^*} = (0, \dots, 0)^T$, *dass alle Eigenwerte der Hesse-Matrix*

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

in x^* das gleiche Vorzeichen haben, so hat f in x^* ein lokales Extremum. Ist $f_{xx}|_{x=x^*} < 0$, so hat so handelt es sich dabei um ein Maximum, andernfalls um ein Minimum.

Die Begriffe „Matrix“ und „Eigenwerte“ werden erst im zweiten Semester erklärt. Im $\mathbb{R}^2$ ist

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

und das Eigenwertkriterium ist gerade $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$.

Beispiel 4.13. Sei $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(x + y^2) + 1/2$, siehe Abbildung 4.3. Leiten wir f partiell nach x und y ab, so erhalten wir den Gradienten

$$f_x = e^{-(x^2+y^2)}(1 - 2x^2 - 2xy^2), \quad f_y = -2e^{-(x^2+y^2)}y(x + y^2 - 1).$$

Aus der notwendigen Bedingung $f_x = f_y = 0$ erhält man vier kritische Punkte: $(-\sqrt{2}/2, 0)$, $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(1/2, -\sqrt{2}/2)$ und $(1/2, \sqrt{2}/2)$. Der erste Punkt ist ein lokales Minimum, der zweite ein Sattel und die letzten beiden lokale Maxima.

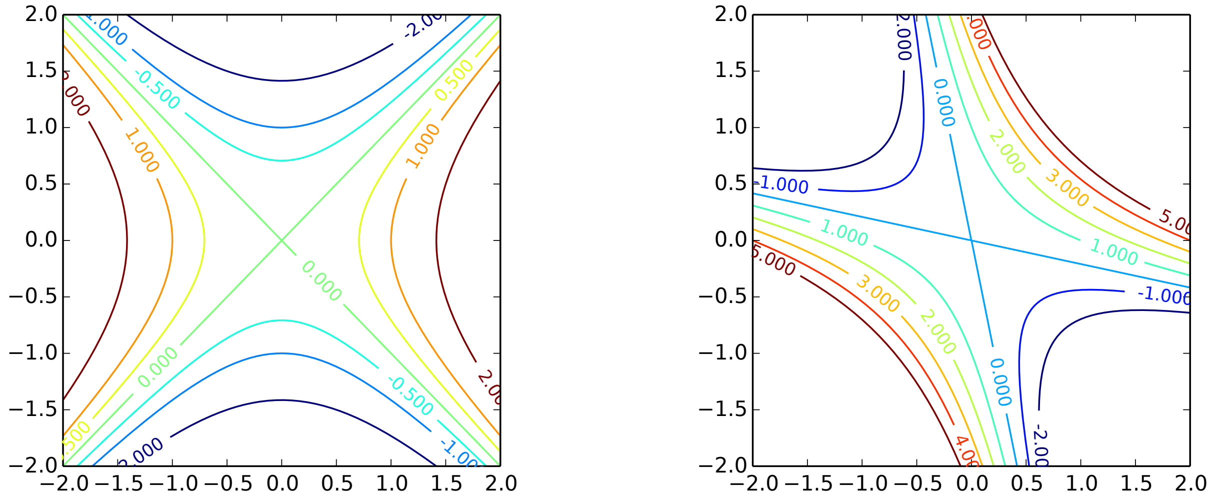


Abbildung 4.2: Konturlinien für $f(x, y) = x^2 - y^2$ (links) und $g(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$ (rechts). Im Koordinatenursprung ist jeweils ein Sattel. Man beachte bei g kein Minimum vorliegt, obwohl $g_{xx} > 0$ und $g_{yy} > 0$.

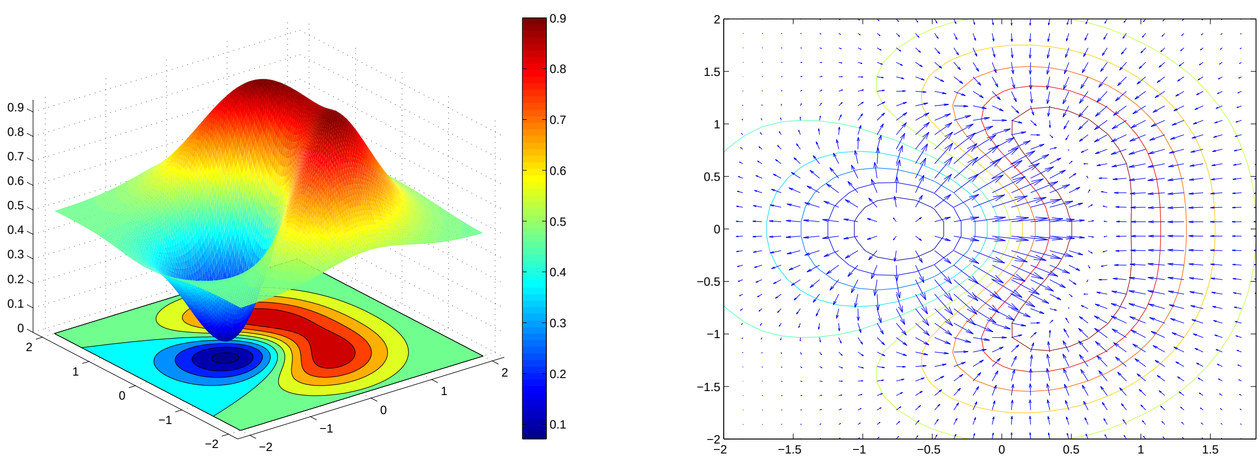


Abbildung 4.3: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(x+y^2)+1/2$. Links: 3D Darstellung, rechts: Gradientenfeld

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Die Methode geht auf Gauss zurückt, der damit 1801 die Bahn von Ceres vorhersagte und schlagartig berühmt wurde.

Zu Messwerten (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ wollen wir eine Regressionsgerade $y = ax + b$ finden, die möglichst „nah“ an den Punkten liegt, vgl. Abbildung 4.4. Wir setzen voraus, dass die x_i exakt sind und minimieren $F(a, b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(ax_i + b) - y_i]^2$. Notwendig ist $\nabla F = 0$, also

$$\sum_{i=1}^{n}((ax_i + b) - y_i)\, x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b) - y_i = 0.$$

Mit $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i$ und $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$ erhält man

$$a = (\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y})/(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \quad \text{und} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

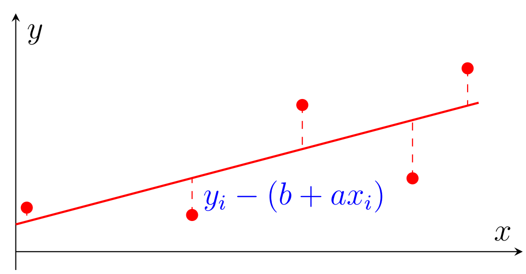


Abbildung 4.4: Finde Gerade, die die Summe der quadrierten vertikalen Abstände minimiert.

4.3 Die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$, Differenzieren impliziter Funktionen

Beispiel 4.14. Sei $f(u, v) = uv$ und $g(x) = f(u(x), v(x))$. Mit der Produktregel folgt $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Satz 4.15. *Sei $u = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$. Dann ist*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial g_i}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x_k}.$$

Für den Spezialfall $f(g(x, y), h(x, y))$ erhält man

$$\frac{df}{dx} = f_g \cdot g_x + f_h \cdot h_x \quad \textit{und} \quad \frac{df}{dy} = f_g \cdot g_y + f_h \cdot h_y.$$

Beweis. Wir betrachten nur den Spezialfall, der allgemeine Fall kann analog bewiesen werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[f(g(x+\epsilon,y),h(x+\epsilon,y)) - f(g(x,y),h(x,y))\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[f(g(x+\epsilon,y),h(x+\epsilon,y)) - f(g(x,y),h(x+\epsilon,y))\\ &\qquad + f(g(x,y),h(x+\epsilon,y)) - f(g(x,y),h(x,y))] = f_g g_x + f_h h_x.\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.16. (a) Anstieg einer Höhenlinie. Skizze.

$$\begin{aligned} u(x,y(x)) - C &= 0 \qquad \Big| \frac{d}{dx}(\cdot)\\ u_x + u_y\cdot y' &= 0\end{aligned}$$

Wir erhalten die Formel $y'(x) = -u_x/u_y$ (Differenzieren impliziter Funktionen). Dazu ein Beispiel. Sei $u = e^x + e^y - 1$. Welchen Anstieg hat die Funktion $y(x)$ für $x = -1$ und $y = \ln(-e^x + 1)|_{x=-1}$?

1. Lösungsweg: Auflösen und dann Ableiten. Wir erhalten $y = \ln(-e^x + 1)$ und somit $y' = -e^x/(-e^x + 1)$.

2. Lösungsweg: Ableiten, dann Auflösen.

$$\begin{aligned} e^x + e^{y(x)} - 1 &= 0 \qquad \Big| \frac{d}{dx}(\cdot)\\ e^x + e^{y(x)}y' &= 0 \qquad \Longrightarrow y' = -e^x/e^y\end{aligned}$$

I. Allg. ist der zweite Weg einfacher.

(b) Totale Ableitung. Spezialfall: $u = g(f(x), h(x))$. Also hängt u nur von einer Variablen x ab. Dann ist
$$\frac{d}{dx}u = \frac{\partial g}{\partial f}\cdot f'(x) + \frac{\partial g}{\partial h}\cdot h'(x).$$

(c) Flächen im Raum. Sei $F(x,y,z) = 0$. Damit ist implizit $z(x,y)$ definiert. Gesucht ist nun $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$. Lösung:
$$0 = \frac{d}{dx}F(x,y,z(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$
Wir erhalten $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial z}$. Analog für y, also $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z}$.

(d) Kurven im Raum. Sei $F(x,y,z) = 0$ und $G(x,y,z) = 0$, d. h. zwei Flächen im Raum schneiden sich. Die Schnittmenge ist i. Allg. eine Kurve. Also sind implizit $y(x)$ und

$z(x)$ definiert. Gesucht: y' und z'. Mit der Kettenregel erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für y' und z':

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{dF}{dx} = F_x + F_y y' + F_z z' \\
0 &= \frac{dG}{dx} = G_x + G_y y' + G_z z'
\end{aligned}
$$

Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, kann man durch Taylorpolynome approximieren:

$$f(x+\Delta x) \approx \underbrace{f(x) + \Delta x f'(x)}_{\text{Tangente}} + (\Delta x)^2/2! f''(x) + \dots$$

Analoges gilt auch für Funktionen in mehreren Variablen. Es ist

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx \underbrace{f(x,y) + \Delta x f_x(x,y) + \Delta y f_y(x,y)}_{\text{Tangentialebene}} + \dots \tag{4.1}$$

Für kleine Änderungen Δx und Δy wird Δf sehr genau durch Zuwachs in der Tangentialebene $f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$ angenährt. Im Grenzübergang erhält man das *totale Differential*

$$df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy.$$

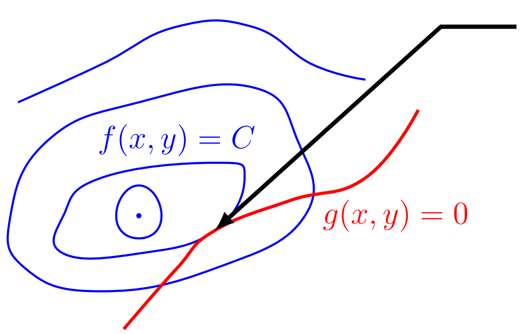
Beispiel 4.17. Sei $p(T,V) = RT/V$. Wie ändert sich p, wenn T und V geringfügig variiert werden? Es gilt $dp = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial p}{\partial V} \cdot dV$ mit $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}$ und $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$.

4.4 Extrema unter Nebenbedingungen

Hat die Funktion $f(x,y)$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, so gilt $H_x = 0$, $H_y = 0$ und $H_\lambda = 0$ mit

$$H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

Der Parameter λ heißt *Lagrangescher Multiplikator*. Aus $\operatorname{grad} H = 0$ kann man noch nicht sicher schließen, ob tatsächlich ein Extremum vorliegt und ob dieses dann ein Maximum oder Minimum ist. Beweis:

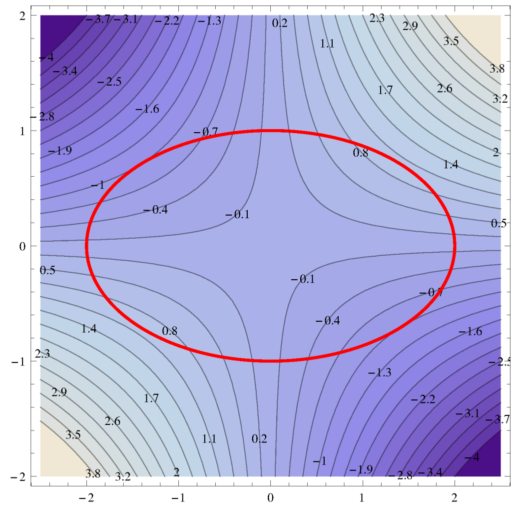


(f_x, f_y) ist parallel zu (g_x, g_y)

$$\Leftrightarrow \quad -(f_x, f_y) = \lambda (g_x, g_y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} 0 &= f_x + \lambda g_x \\ 0 &= f_y + \lambda g_y \\ 0 &= g(x,y) \end{aligned}\right\} \operatorname{grad}_{(x,y,\lambda)} H(x,y,\lambda)$$

Beispiel 4.18. Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2/2^2 + y^2 - 1 = 0$.



Lösung: Mit

$$H(x,y) = x \cdot y + \lambda(x^2/2^2 + y^2 - 1)$$

erhalten wir das Gleichungssystem

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + \lambda x/2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = x + \lambda 2y \stackrel{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x^2/4 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Nach der ersten Gleichung ist $y = -\lambda x/2$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $x + (-\lambda x/2) \cdot 2\lambda = 0$ also $1 - \lambda^2 = 0$. Somit ist $\lambda = \pm 1$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir nun $x^2/4 + (\pm x/2)^2 - 1 = 0$, also $x^2/2 = 1$, d. h. $x = \pm\sqrt{2}$ und $y = \mp\sqrt{2}/2$.

4.5 Kurvenintegrale 1. Art (Bogenlängen)

1. Semester: Wie lang ist der Weg von A nach B? Antwort:

$$L = \int_{\Gamma: A \to B} 1\, ds = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Angenommen, wir durchlaufen den Weg mit der Geschwindigkeit $v(x,y)$ und fragen nun, wie lange es dauert, um von A nach B zu gelangen. Skizze. Ansatz $t = s/v$. Setze $w(x,y) = v^{-1}(x,y)$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} w(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$$

Definition 4.19. Sei $(x(t), y(t)), t \in [0, T]$ die Parametrisierung eines Weges von $A = (x(0), y(0))$ nach $B = (x(T), y(T))$. Sei $w(x, y)$ eine gegebene Gewichtsfunktion. Dann heißt das Integral

$$\int_{\Gamma:A\to B} w\, ds := \int_0^T w(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Kurvenintegral 1. Art.

Ist die Kurve Γ von $A = (0, y(0))$ nach $B = (x(T), y(T))$ durch eine explizite Funktion $y = y(x)$, $0 \leq x \leq T$ gegeben, erhält man das Kurvenintegral 1. Art

$$\int_{\Gamma:A\to B} w\, ds := \int_0^T w(x, y(t)) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

Das Kurvenintegral 1. Art hängt vom Weg ab, aber nicht von der Durchlaufrichtung, d. h.

$$\int_{\Gamma:A\to B} w\, ds = \int_{\Gamma:B\to A} w\, ds$$

Beweis: Übung

4.6 Kurvenintegrale 2. Art

Gegeben sind ein Weg $\Gamma : (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq T$ und ein Vektorfeld $(P, Q)^\top$. Skizze. Dann heißt

$$\int_\Gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy := \int_0^T \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)\, dt.$$

Kurvenintegral 2. Art. Man erhält das Kurvenintegral 2. Art aus Summen der Form

$$S_n = \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

durch Grenzübergang $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$ und $n \to \infty$.

Beispiel 4.20. Auf einen Massepunkt in (x, y, z) wirke eine Kraft (F_x, F_y, F_z). Dann ist die Arbeit, die verrichtet wird, um den Massepunkt von A nach B entlang eines Weges Γ zu bewegen, das entsprechende Kurvenintegral 2. Art:

$$W = \int_\Gamma F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz.$$

Ist die Kraft eine Potentialkraft (z. B. eine Gravitationskraft), so ist das Integral wegunabhängig. I. Allg. ist das Integral jedoch wegabhängig.

Das Kurvenintegral 2. Art hat folgende Eigenschaften:

- Bei Umkehr der Orientierung erhält man den gleichen Betrag, aber das umgekehrte Vorzeichen: $\int_{\Gamma:A\to B} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma:B\to A} P\,dx + Q\,dy$
- Das Integral ist intervalladditiv, d. h., es gilt

$$\int_{\Gamma:A\to B} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma:B\to C} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma:A\to C} P\,dx + Q\,dy.$$

Um $\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ zu berechnen, substituiert man im Integral mit Hilfe einer Parametrisierung $x(t), y(t)$, $t \in [0,T]$.

Beispiel 4.21. Gesucht ist $\int_\Gamma 2y\,dx + 3x^2\,dy$ von $A = (0,0)$ nach $B = (1,1)$.

(a) Sei Γ der Weg entlang der Parabel $y = x^2$. Mit $x = t$, $x'(t) = 1$, $y(t) = t^2$ und $y'(t) = 2t$ folgt

$$\int_\Gamma 2y\,dx + 3x^2\,dy = \int_0^1 \left(2t^2 + 3t^2 2t\right)\,dt = \frac{2}{3}t^3 + \frac{6}{4}t^4|_0^1 = \frac{13}{6}.$$

(b) Sei Γ der Weg entlang der Geraden $y = x$. Wir erhalten

$$\int_\Gamma 2y\,dx + 3x^2\,dy = \int_0^1 \left(2t + 3t^2\right)\,dt = t^2 + t^3|_0^1 = 2.$$

Das Integral ist also wegabhängig. □

Beispiel 4.22. Gesucht sei $\int_\Gamma y^2\,dx + 2xy\,dy$. Für $x = t$ und $y = t^2$, $t \in [0,1]$ erhalten wir

$$\int_\Gamma y^2\,dx + 2xy\,dy = \int_0^1 \left(t^4 + 4t^4\right)\,dt = t^5|_0^1 = 1.$$

Für den Weg $x = y = t$ ergibt sich dasselbe Integral

$$\int_\Gamma y^2\,dx + 2xy\,dy = \int_0^1 \left(t^2 + 2t^2\right)\,dt = t^3|_0^1 = 1.$$

Höhenlinien, Stammfunktion

Eine Funktion $F(x,y)$ können wir durch Höhenlinien veranschaulichen, siehe Abbildung 4.5, links. Die Pfeile senkrecht zu den Höhenlinien erhalten wir durch Ableiten, $\mathrm{grad}(F) = (P,Q) = (f_x, f_y)$. Angenommen, das Vektorfeld $(P(x,y), Q(x,y))$ ist gegeben. Können wir dann eine zugehörige Stammfunktion, also Höhenlinien finden? Am rechten Bild sieht man, dass das nicht immer geht. Warum ist das so? Nach der Kettenregel ist $\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = F_x x'(t) + F_y y'(t)$, also $dF = F_x\,dx + F_y\,dy$. Sei nun

$$F(x,y) \underset{\textit{Integrieren}}{\overset{\text{Ableiten}}{\rightleftharpoons}} dF = P\,dx + Q\,dy$$

gegeben. Von links nach rechts kommt man immer, $P = F_x$ und $Q = F_y$. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann $F_{xy} = F_{yx}$. Um von rechts nach links kommen zu können, muss daher

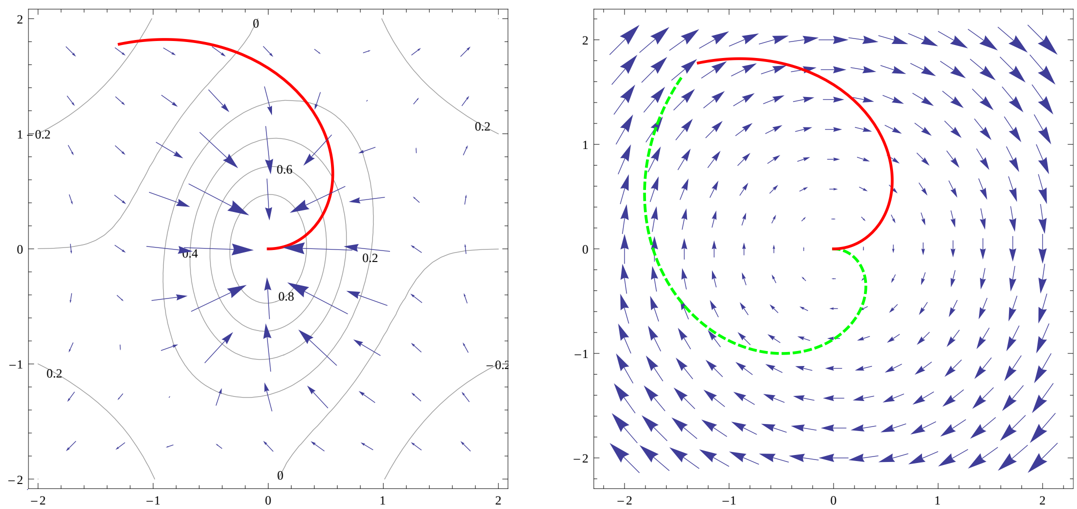


Abbildung 4.5: Das linke Bild zeigt ein Vektorfeld zur Stammfunktion $F(x, y) = \exp(-2x^2 - y^2) + \frac{xy}{10}$. Das Kurvenintegral 2. Art ist wegunabhängig. Rechts sieht man das Vektorfeld $(P, Q) = (y, -x)$, für das keine Höhenlinien existieren.

die *Integrabilitätsbedingung* $P_y = Q_x$ erfüllt sein. Man sagt, $P\,dx + Q\,dy$ muss ein *totales Differential* sein.

Berechnung der Stammfunktion: Gegeben sei $dF = P\,dx + Q\,dy$. 1. Schritt: Wir prüfen, ob $P_y = Q_x$ ist. Nur bei Gleichheit existiert eine Stammfunktion. 2. Schritt: Wir integrieren beide Seiten der Gleichung $F_x = P$ unbestimmt nach x, das liefert $F = \int P(x, y)\,dx + C(y)$. 3. Schritt: Um $C(y)$ zu bestimmen, leiten wir nun wieder ab und vergleichen mit Q.

Beispiel 4.23. Wir suchen die Stammfunktion zum Differential $(2 + 4y + 12xy)\,dx + (4x + 6x^2 + 6y)\,dy$.

1. Schritt:

$$P_y = 4 + 12x \stackrel{?}{=} 4 + 12x = Q_x \qquad \checkmark$$

2. Schritt:

$$F = \int P\,dx = 2x + 4xy + 6x^2y + C(y)$$

3. Schritt:

$$F_y = 4x + 6x^2 + C'(y) \stackrel{!}{=} 4x + 6x^2 + 6y$$

Also $C'(y) = 6y$ und somit $C(y) = 3y^2 + K$. Antwort: Die Stammfunktion ist $F(x, y) = 2x + 4xy + 6x^2y + 3y^2 + K$.

Beispiel 4.24. Für welchen Wert b existiert eine Stammfunktion zu $(e^y + bxy + 1)\,dx + (xe^y + x^2)\,dy$? Lösung:

$$P_y = e^y + bx \stackrel{!}{=} Q_x = e^y + 2x,$$

also ist $b = 2$. Wir erhalten $F = \int xe^y + x^2\,dy = xe^y + yx^2 + C(x)$. Mit

$$F_x = e^y + 2yx + C'(x) \stackrel{!}{=} e^y + 2bxy + 1$$

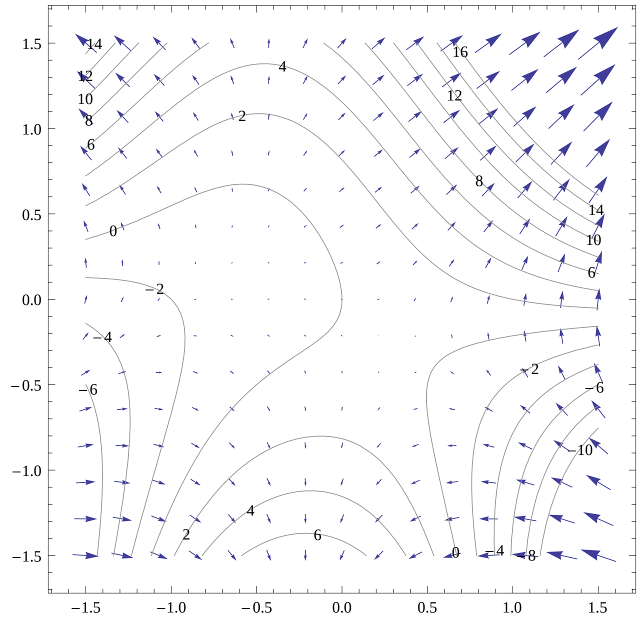


Abbildung 4.6: Vektorfeld und Stammfunktion für Beispiel 4.23

folgt $C'(x) = 1$, also $C(x) = x + K$. Somit ist $F(x, y) = xe^y + yx^2 + x + K$.

Beispiel 4.25 (Exakte Differentialgleichungen). Gesucht ist die Lösung zu $y' = -(t+y)/(t+2y)$. Wir stellen um: $(t+y)\,dt + (t+2y)\,dy = 0 = dF$. 1. Schritt: Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, $1 = 1$ ✓ 2. Schritt: $F(t, y) = \frac{1}{2}t^2 + yt + C(y)$. 3. Schritt: $t + C'(y) \overset{!}{=} t + 2y$ Also $C'(y) = 2y$ und somit $C(y) = y^2 + K$. $F(t, y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + ty(t) + y(t)^2 + K = 0$ definiert implizit die Lösung $y(t)$, vgl. Abbildung 4.7.

Beispiel 4.26. Gesucht sei wieder $\int_\Gamma y^2\,dx + 2xy\,dy$ (siehe Beispiel (4.22)). Weil die Integrabilitätsbedingung $P_y = 2y \overset{\checkmark}{=} Q_x$ erfüllt ist, ist das Integral wegunabhängig. Die Stammfunktion ist $F = xy^2 + C(y)$. Also ist $C'(y) = 0$ und $F(x, y) = xy^2$. Wir erhalten für jede Kurve Γ das Integral

$$\int_\Gamma y^2\,dx + 2xy\,dy = F(x, y)|_A^B = xy^2|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1\ .$$

Satz 4.27. *Das Kurvenintegral 2. Art $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$ ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann wegunabhängig, wenn eine Stammfunktion $F(x, y)$ mit $dF = P\,dx + Q\,dy$ existiert. Es gilt*

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = F(x, y)|_A^B\,,$$

wobei Γ ein Weg von A nach B ist.

Beweis. „Stammfunktion ⇒ wegunabhängig“:

$$F(x(t), y(t))|_0^T = \int_0^T \frac{d}{dt}F(x(t), y(t))\,dt = \int_0^T \left(F_x x'(t) + F_y y'(t)\right)\,dt = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$

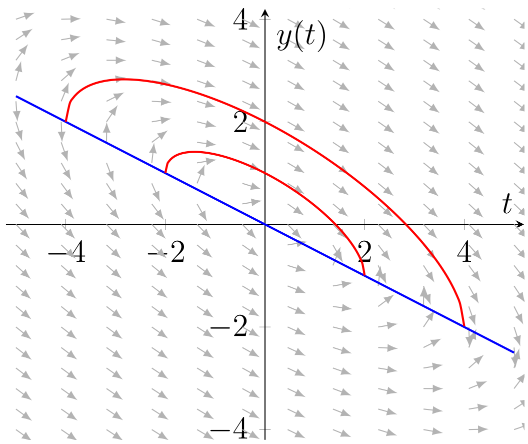


Abbildung 4.7: Vektorfeld und Lösungen $y(t)$ zur exakten Differentialgleichung $y' = -(t+y)/(t+2y)$. Die Gerade $y = -t/2$ markiert die Singularität.

„wegunabhängig $\Rightarrow$ Stammfunktion“: Sei Γ ein Weg, der in A startet und im Punkt $B = (x_b, y_b)$ endet. Setze $F(x_b, y_b) := \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$. Zeige, dass $F(x_b, y_b)$ Stammfunktion ist. Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(x_b+h, y_b) - F(x_b, y_b)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_A^{(x_b+h,y_b)} P\,dx + Q\,dy - \left(\int_A^{(x_b,y_b)} P\,dx + Q\,dy\right)\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{(x_b,y_b)}^{(x_b+h,y_b)} P\,dx\right) = P(x_b, y_b)$$

□

Bemerkung 4.28. Das Gebiet muss einfach zusammenhängend sein, sonst gilt die Aussage nicht (vgl. Übungsaufgabe).

Beispiel 4.29 (Kurvenintegrale im Komplexen entlang geschlossener Wege). Sei B der Einheitskreis, $z = \exp(i\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$\oint_B z^k\,dz = \int_0^{2\pi} z^k zi\,d\varphi = \begin{cases} 2\pi i & \text{für} \quad k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Da differenzierbare Funktionen im Komplexen als Reihe dargestellt werden können, folgt daraus letztendlich die Cauchysche Integralformel

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-y}\,dz,$$

wobei Γ der Rand eines Gebietes ist, in dem $f(z)$ keine Polstellen besitzen darf.

Kapitel 5

Lineare Algebra

Der geometrische Vektorbegriff

Vektoren besitzen eine Richtung und eine Länge, aber keinen Anfangs- oder Endpunkt. Addiert man zwei Vektoren, so erhält man als Resultierende die Diagonale im aufgespannten Parallelogramm, Abbildung 5.1. Vektoren können mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden: $\lambda > 1$ entspricht einer Streckung und $0 < \lambda < 1$ einer Stauchung. Mit $\lambda < 0$ wird die Orientierung gewechselt.

5.1 Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und Skalarprodukte

Für beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

und einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die Vektorraumeigenschaften

$$\begin{aligned} (x+y)+z &= x+(y+z) && \text{Assoziativgesetz,} \\ x+y &= y+x && \text{Kommutativgesetz,} \\ \lambda(x+y) &= \lambda x + \lambda y && \text{Distributivgesetz.} \end{aligned}$$

Meist schreiben wir die Vektoren als Spaltenvektoren. Durch *Transponieren* erhalten wir entsprechende Zeilenvektoren. Mit $x^\top$ bezeichnen wir den transponierten Vektor, siehe Definition 5.21,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

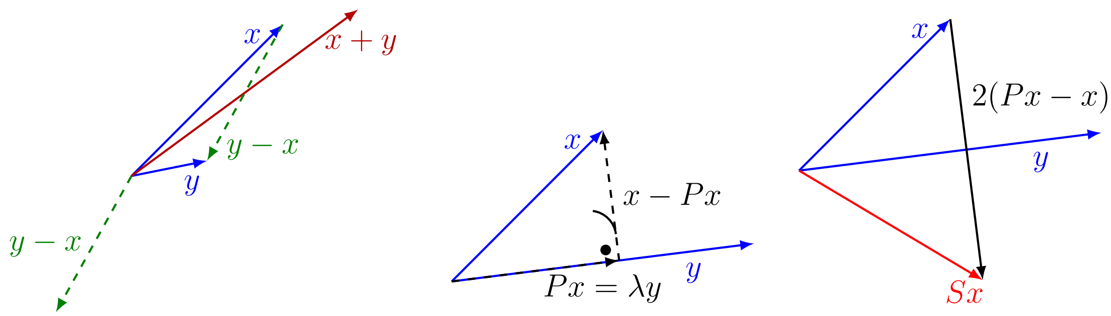


Abbildung 5.1: Vektoroperationen. Addition (links), Projektion (Mitte) und Spiegelung (rechts)

Es gilt $(x^\top)^\top = x$.

Definition 5.1 (Skalarprodukt). Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt*, wenn sie symmetrisch, linear und definit ist, d. h., wenn gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle y, x\rangle \\ \langle x, y+z\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad \text{und} \quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \\ 0 &< \langle x, x\rangle \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{(Nullvektor)}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\langle x, y\rangle_2 := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ heißt *Euklidisches Skalarprodukt*.

Mit $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ bezeichnen wir die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 5.2. Die komplexen Zahlen bilden einen Vektorraum (über $\mathbb{C}$). Definiert man ein Skalarprodukt $\langle x, y\rangle_H := x \cdot \overline{y}$, so ist $\sqrt{\langle x, x\rangle_H}$ der Betrag der komplexen Zahl x. Im Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y\rangle_H := \sum_{k=1}^n x_k \cdot \overline{y}_k$ ein Skalarprodukt.

Definition 5.3 (orthogonal). Zwei Vektoren x, y mit $\langle x, y\rangle = 0$ heißen *orthogonal*. Man schreibt $x \perp y$.

Mit Skalarprodukten kann man (orthogonal) projizieren. Seien zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei Px die orthogonale Projektion von x auf y.

Dann gilt: $Px = \lambda y$ und $Px \perp (x - Px)$. Also $\langle \lambda y, x - \lambda y\rangle = 0$. Mit der Linearität erhalten wir $\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle = 0$ und somit $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$. Zusammengefasst: Die Projektion eines Vektors x auf y ist gegeben durch

$$Px = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

Es gilt $P(Px) = Px$. Beweis:

$$PPx = \frac{\left\langle \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y, y \right\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \frac{\langle y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = Px$$

Mit $Sx := x + 2(Px - x) = 2Px - x$ erhalten wir eine Spiegelung an der Geraden, die durch y aufgespannt wird. Es gilt $S(Sx) = x$. Beweis:

$$S(Sx) = S(2Px - x) = 2P(2Px - x) - (2Px - x) = 4Px - 2Px - 2Px - (-x) = x$$

Beispiel 5.4. Wir betrachten die Gerade in Parameterform $y = x + t \cdot v$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $x = (1,1)^\top$ und $v = (1, -\frac{1}{2})^\top$. Eine implizite Form der gleichen Geraden ist $\{y : \langle y - x, n\rangle = 0\}$ mit dem Stellungsvektor $n = (1,2)^\top$. Sei $Q = (3,1)$ gegeben. Wie lang ist die kürzeste Verbindung von Q zu g? Lösung: Wir projizieren $Q - x$ senkrecht auf n.

$$L = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also ist $|L| = \sqrt{\langle L, L\rangle} = \frac{2}{5}\sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}/5 \approx 0.8944.$ □

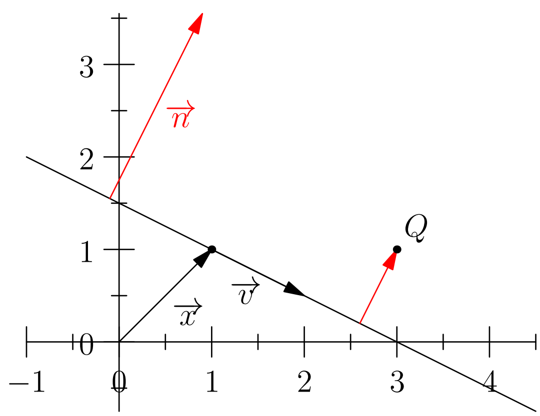


Abbildung 5.2: Skizze zu Beispiel 5.4

Satz 5.5. *Für jedes Skalarprodukt gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} = |x| \cdot |y|.$$

Beweis. Skalarprodukte sind positiv definit, also gilt

$$0 \le \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

Mit $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ erhalten wir

$$0 \le \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}.$$

Also gilt $\langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$. □

Bemerkung 5.6. Für das Euklidische Skalarprodukt gilt $\langle x, y\rangle_2 = |x|\,|y| \cdot \cos\alpha$, wobei α der eingeschlossene Winkel ist. Skizze. Dabei ist $|\cos\alpha| \le 1$. Beweis:

$$(\cos(\alpha))^2 = \frac{|Px|^2}{|x|^2} = \frac{\langle Px, Px\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

mit $Px = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y$. Also ist

$$\cos^2\alpha = \frac{\left\langle \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y, \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y \right\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot \frac{\langle y,y\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle} \leq 1 \qquad \square$$

Beispiel 5.7 (Innenwinkel im Tetraeder). Wie betrachten einen Würfel mit Kantenlänge 2. Der Mittelpunkt habe die Koordinaten $Z = (1,1,1)$ und zwei der vier Ecken sind $A = (0,0,0)$ und $B = (2,2,0)$. Sei $x = A - Z = (-1,-1,-1)$ und $y = B - Z = (1,1,-1)$. Dann ist $\langle x,y\rangle = -1$, also ist der Innenwinkel $\alpha = \arccos(-1/3) = 109{,}5°$.

Satz 5.8. *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$.*

Beweis. Sei $z = x + y$.

$$|z|^2 = \langle z,z\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle = (|x| + |y|))^2$$

$\square$

Übung: Zeige $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Definition 5.9. Ein Vektor $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^\top$, der nur an der k-ten Stelle eine Eins hat, heißt k-ter Einheitsvektor.

Beispiel 5.10. Im $\mathbb{R}^3$ ist $e_1 = (1,0,0)^\top$ die Richtung der x-Achse, $e_2 = (0,1,0)^\top$ die der y-Achse und $e_3 = (0,0,1)^\top$ die der z-Achse.

Satz 5.11. *Jeder Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ kann auf eindeutige Weise als Linearkombination der Einheitsvektoren geschrieben werden.*

Beweis. Existenz:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Eindeutigkeit: Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \widetilde{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{x}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \widetilde{x}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine zweite Darstellung. Dann gilt

$$0 = x - x = (x_1 - \widetilde{x}_1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + (x_2 - \widetilde{x}_2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + (x_n - \widetilde{x}_n)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Bildet man das Euklidische Skalarpodukt von (5.1) mit dem k-ten Einheitsvektor, so ergibt sich

$$0 = (x_k - \widetilde{x}_k)\underbrace{\langle e_k, e_k\rangle_2}_{=1}$$

also ist $x_k = \widetilde{x}_k$, d. h., die Darstellung ist eindeutig. □

Euklidische Skalarprodukte der Einheitsvektoren:

$$\langle e_k, e_j\rangle_2 = \begin{cases}1 & k = j\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Definition 5.12 (Linearer Raum). Eine Menge M heißt *linearer Raum*, falls M bezüglich Addition und bezüglich Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen ist. Also $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$ und $x \in M \Rightarrow \alpha x \in M$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiele für lineare Räume sind: Vektoren im $\mathbb{R}^n$, Polynome, stetige Funktionen, differenzierbare Funktion.

Die Menge

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y = tv_1 + sv_2 + r, r \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

beschreibt eine Ebene im Raum, die nicht durch den Ursprung geht. Diese Menge M ist nur dann ein linearer Raum, wenn der Nullvektor in M liegt.

Definition 5.13 (Lineare Unabhängigkeit). Eine Menge $b_1, b_2, \ldots, b_n$ von Vektoren heißt *linear unabhängig*, falls der Nullvektor nur als triviale Linearkombination dargestellt werden kann, d. h.

$$0 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n \Longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Definition 5.14 (Basis). Sei M ein linearer Raum. Eine Menge $B \subset M$ heißt *Basis von M*, falls sich jedes Element $x \in M$ auf eindeutige Weise als Linearkombination $x = \sum \alpha_i b_i$, $b_i \in B$ darstellen lässt. Die Anzahl der Element von B heißt Dimension von M.

Sind B_1 und B_2 Basen von M, so gilt $|B_1| = |B_2|$, d. h., die Dimension von M ist wohldefiniert.

Eine Basis ist demnach eine linear unabhängige Menge, die den ganzen Raum aufspannt.

Beispiel 5.15. (a) Die Vektoren $e_1 = (1, 0, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)^\top$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)^\top$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Es ist $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

(b) Die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

bilden *keine* Basis des $\mathbb{R}^3$, da sie linear abhängig sind. Es gilt $b_1 - 2b_2 - b_3 = (0,0,0)^\top$, also ist der Nullvektor nicht eindeutig darstellbar. Ursache: b_3 liegt in der Ebene, die durch b_1 und b_2 aufgespannt wird.

(d) Die Menge aller Polynome hat als Basis die Monome $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. Die Dimension des Polynomraums ist ∞.

Besonders wichtig sind *orthonormale Basen* mit

$$b_i, b_j \in B \Rightarrow \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} .$$

5.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

Beispiel 5.16 (Drehung in der Ebene). Skizze. $y = Dx$. Wir betrachten zuerst Drehungen der Einheitsvektoren und nutzen dann die Linearität, um beliebige Vektoren drehen zu können. Es gilt $De_1 = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ und $De_2 = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$. Drehungen sind linear, d. h. $D(\lambda x) = \lambda Dx$ und $D(x + \widetilde{x}) = Dx + D\widetilde{x}$. Damit gilt

$$D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = D(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1De_1 + x_2De_2 = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Definition 5.17 (Lineare Abbildung). Gegeben seien lineare Räume X und Y. Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ heißt *linear*, wenn $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ und $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ ist.

Ganz allgemein gilt, dass die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung selbst linear ist, denn

$$\begin{aligned} F^{-1}(y_1 + y_2) &= F^{-1}(F(x_1) + F(x_2)) = F^{-1}(F(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = F^{-1}(y_1) + F^{-1}(y_2) \\ F^{-1}(\lambda y) &= F^{-1}(\lambda F(x)) = F^{-1}(F(\lambda x)) = \lambda x = \lambda F^{-1}(y) \end{aligned}$$

Eine lineare Abbildung $F\colon X \to Y$ mit $X = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^n$ kann als *Matrix* A mit n Zeilen und m Spalten dargestellt werden. Sei $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m$. Dann ist

$$y = F(x) = F(e_1)x_1 + F(e_2)x_2 + \cdots + F(e_m)x_m = [F(e_1), F(e_2), \cdots, F(e_n)] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax.$$

Wir erhalten somit die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei a_{ij} das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix A ist.

Beispiel 5.18. Wir betrachten ein Gemisch aus Sauerstoff, Stickstoff und Kohlendioxid, also $x = ([\mathrm{O}_2], [\mathrm{N}_2], [\mathrm{CO}_2])^\top$. Dann erhalten wir die Gesamtmolarität, die Anzahl der Sauerstoff-Atome und das Gesamtgewicht des Gemisches durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 32 & 28 & 44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\mathrm{O}_2] \\ [\mathrm{N}_2] \\ [\mathrm{CO}_2] \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung (Matrixinverse) $A^{-1}\colon Y \to X$ existiert.

Matrizenrechnung

Quadratische Matrizen, die nur Einsen auf der Hauptdiagonale haben, heißen Einheitsmatrizen und werden mit I bezeichnet. $I = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $I \cdot x = x$. Beweis: Übung.

Matrizen, die nur aus Nullen bestehen, heißen Nullmatrizen.

Für $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert man $A + B$ komponentenweise:

$$C = A + B \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ mit } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Haben A und B unterschiedliches Format, so ist die Matrizenaddition nicht definiert.

Eine Matrix kann mit einem Skalar λ multipliziert werden, indem jede Komponente mit λ multipliziert wird:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Zwei Matrizen sind gleich, wenn $A + (-B) = 0$ (Nullmatrix) ist.

Seien $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$ und $Z = \mathbb{R}^m$. Sei $B\colon X \to Y$ und $A\colon Y \to Z$. Dann ist die Komposition $C\colon X \to Z$ auch eine lineare Abbildung, also eine Matrix (Skizze). Die Matrizen haben folgende Dimension:

	A	B	C
# Zeilen	m	k	m
# Spalten	k	n	n

Es gilt

$$c_{ij} = \langle i\text{-te Zeile von } A, j\text{-te Spalte von } B\rangle = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

Beweis:

$$C \cdot e_j = A(B \cdot e_j) = A \cdot (j\text{-te Spalte von } B)$$

Beispiel 5.19.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 5.20. Es gilt $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, aber i. Allg. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$, siehe Beispiel 5.24.

Definition 5.21. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Die Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$, die als Zeilen die Spalten von A enthält, also $(a_{ij})^T = (a_{ji})$, heißt *Transponierte* von A. Matrizen mit $A^\top = A$ heißen *symmetrisch*.

Beispiel 5.22.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 5.23. $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$

Beispiel 5.24 (Bewegungen in der Ebene). Wir betrachten die Matrizen

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

die zu einer Drehung um den Winkel α und zu einer Spiegelung an der x-Achse gehören. Dann gilt $D(\alpha)S \neq SD(\alpha)$, vgl. Abbildung 5.3. $\square$

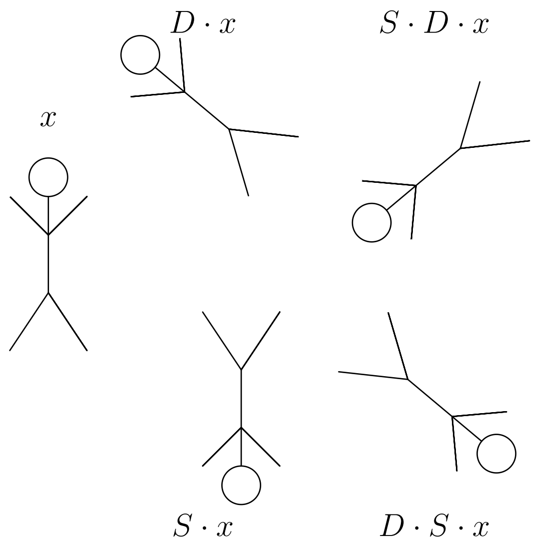


Abbildung 5.3: Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ: Obere Zeile: erst drehen, dann spiegeln. Untere Zeile: erst spiegeln, dann drehen. Wie man sieht, hängt das Ergebnis von der Reihenfolge ab, d. h., für dieses Beispiel ist i. Allg. $S \cdot D \cdot x \neq D \cdot S \cdot x$.

Beispiel 5.25. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine zufällige Zeichenkette der Länge k über dem Alphabet {A,C,G,T} das Wort „ATTA“? Der Übergangsgraph erzeugt eine zugehörige Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die unterste Komponente des Vektors $M^k e_1$ zählt die Anzahl der Wörter der Länge k, die „ATTA“ mindestens einmal enthalten. Die Matrix

$$M^2 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 11 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

entspricht den Übergängen, die durch Wörter mit zwei Buchstaben erzeugt werden. Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage nach der Wahrscheinlichkeit erhalten wir durch die Berechnung der Matrix-Vektor-Produkte.

Definition 5.26. Eine quadratische Matrix Q heißt *orthogonal*, falls $Q^T Q = I$ gilt.

Beispiel 5.27. Die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um $\varphi = \arccos(0.6)$ und ist orthogonal.

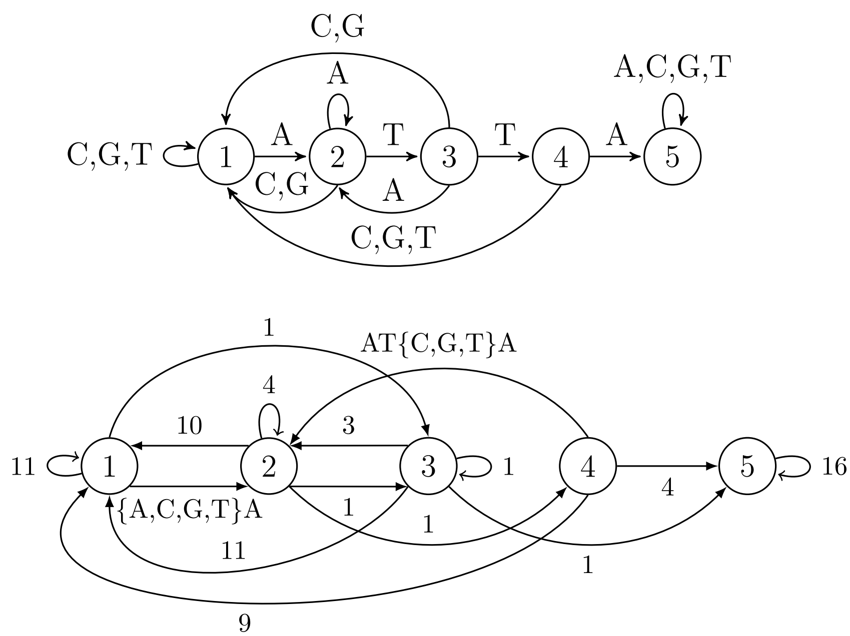


Abbildung 5.4: Oben: Endlicher Automat, der „ATTA“ akzeptiert. Unten: Graph zum Quadrat der Übergangsmatrix. Die Zahl an der Kante von j zu i ist Element (i, j) in M^2 und entspricht der Anzahl von Wörtern mit zwei Buchstaben, die vom Zustand j nach i führen.

Für das Euklidische Skalarprodukt gilt $\langle x, y\rangle = x^\top y = y^\top x$.

Satz 5.28. *Die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix ändert die Euklidische Länge eines Vektors nicht.*

Beweis. $\|Qx\|_2 = \sqrt{\langle Qx, Qx\rangle} = \sqrt{x^T Q^T Q x} = \|x\|_2$ □

Matrixinverse

Satz 5.29. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(x) = A\cdot x$. Genau dann, wenn die Spalten von A linear unabhängig existiert die Umkehrabbildung $F^{-1}(y)$ mit $F^{-1}(F(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $F(F^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Diese Umkehrabbildung ist linear, d. h., es gibt eine Matrix A^{-1} mit*

$$A^{-1}A = I \quad \textit{und} \quad AA^{-1} = I.$$

Beweis. Angenommen $y = Ax_1$ und $y = Ax_2$. Dann ist $0 = A(x_1 - x_2)$. Genau dann, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, folgt $x_1 = x_2$, also die Eindeutigkeit.

Und aus

$$F^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = F^{-1}(\alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2)) = F^{-1}(F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \alpha_1 F^{-1}(y_1) + \alpha_2 F^{-1}(y_2)$$

folgt die Linearität von $F^{-1}(y)$. □

Beispiel 5.30. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Probe. ✓

Satz 5.31. *Für* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *gilt* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Satz 5.32. *Für orthogonale Matrizen mit* $Q^TQ = I$ *gilt* $Q^{-1} = Q^T$.

Definition 5.33. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt *regulär*, falls A^{-1} existiert, oder *singulär*, falls A^{-1} nicht existiert.

5.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten kann in der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ geschrieben werden.

Homogene Systeme $Ax = 0$ haben stets die triviale Lösung $x = (0, \dots, 0)^T$. Weitere, nichttriviale Lösungen gibt es genau dann, wenn A weniger als n linear unabhängige Zeilen besitzt, also effektiv weniger Gleichungen als Variablen gegeben sind.

Beispiel 5.34.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat die Lösung} \quad t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Definition 5.35. Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $Ax = 0$ bezeichnet man als *Kern* oder *Nullraum* der Matrix A:

$$\mathrm{kern}(A) := \{x\colon Ax = 0\}.$$

Satz 5.36. *Der Kern einer Matrix ist ein linearer Raum.*

Beweis. Übung □

Inhomogene Systeme können keine, genau eine oder unendliche viele Lösungen besitzen.

Beispiel 5.37. Die lineare Gleichung $ax = b$ hat für $a \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = b/a$. Für $a = 0$ und $b \neq 0$ gibt es keine Lösung, und für $a = 0$ und $b = 0$ ist jede reelle Zahl x eine Lösung.

Beispiel 5.38. (a) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung, weil die Gleichungen widersprüchlich sind.

(b) Das System
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ist eindeutig lösbar, $x = (-1, 1)^T$.

(c) Das System
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
hat als Lösungsmenge alle Punkte auf der Geraden $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ändert sich nicht (a) beim Vertauschen von Zeilen in der erweiterten Matrix $[A, b]$ und auch nicht (b) bei der Addition vom Vielfachen einer Zeile auf eine andere. Ziel des Eliminationsverfahrens ist eine *Stufenform* (engl.: *row echelon form*), weil dann die Lösungsstruktur abgelesen werden kann, vgl. Abbildung 5.5

Bemerkung 5.39. Bei der Stufenform kann auch eine „innere“ Stufe „länger als 1 sein“. In diesem Falle sind dann die zugehörigen „mittleren“ Variablen frei wählbar.

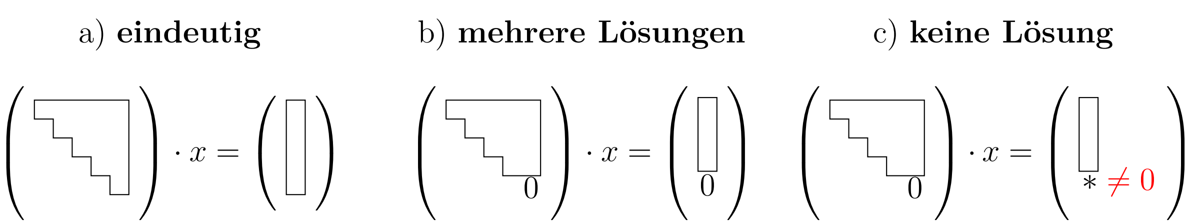


Abbildung 5.5: Die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems in Stufenform.

Beispiel 5.40.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$
Wir erhalten:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
Die eindeutig bestimmte Lösung ist somit $x_3 = 2$, $x_2 = (-3+6)/(-3) = -1$ und $x_1 = 1$. □

Algorithmus für das Gaußsche Eliminationsverfahren

Teil 1: Transformation auf Dreiecksform

for $k = 1, \dots, n-1$
  Zeilentausch, falls $a_{kk} = 0$ ist
  for $i = k+1, \dots, n$ — Addition der k-ten Zeile auf die i-te Zeile
    for $j = k, \dots, n$
      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$
    $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$

Teil 2: Rückwärtssubstitution

for $i = n, \dots, 1$
  $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)/a_{ii}$

Eigenschaften:

- Der Algorithmus bricht vorzeitig ab, wenn $Ax = b$ nicht eindeutig lösbar ist (weil im zweiten Programmschritt kein $a_{kk} \neq 0$ gefunden werden kann).
- Weil drei Schleifen geschachtelt sind, ist der Aufwand proportional zu n^3.
- Supercomputer werden in der TOP-500-Liste anhand der Geschwindigkeit verglichen, mit der sie den Gaußalgorithmus ausführen können (Linpack-Benchmark).

Beispiel 5.41.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Rechnerei}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist somit eine Ebene im $\mathbb{R}^5$:

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung des homogenen Systems = Kern}} \qquad \square$$

Satz 5.42 (Struktur der Lösung eines inhomogenen linearen Systems)**.**

$$\boxed{\textit{Allgemeine Lösung } x \textit{ des inhomogenen Gleichungssystems}} = \boxed{\textit{Eine Lösung } x^* \textit{ des inhomogenen Systems}} + \boxed{\textit{Allgemeine Lösung } x_0 \textit{ des homogenen Systems}}$$

Die Dimension der Lösungsmenge ist gleich $\dim \operatorname{kern}(A)$*, falls es eine spezielle Lösung gibt.*

Beweis. Sei x^* eine spezielle Lösung von $Ax^* = b$. 1) Sei $x_0 \in \operatorname{kern}(A)$ beliebig. Dann ist $A(x^* + x_0) = Ax^* + Ax_0 = b + 0 = b$. Also ist $x^* + x_0$ eine Lösung. 2) Sei $\widetilde{x}$ eine zweite Lösung. Dann ist $A(\widetilde{x} - x^*) = b - b = 0$, also ist $\widetilde{x} - x^* \in \operatorname{kern}(A)$. $\square$

Definition 5.43. Der lineare Raum $\{y : y = Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *Bild* der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Die Dimension von $\operatorname{bild}(A)$ heißt *Rang der Matrix*. Man schreibt $\operatorname{rang}(A) := \dim \operatorname{bild}(A)$.

Bemerkung 5.44. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass der Rang die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten einer Matrix ist. □

Der Rang einer Matrix kann mit Hilfe des Gaußalgorithmus bestimmt werden, weil die Zeilenumformungen den Rang nicht verändern. An der Dreiecksform kann der Rang dann abgelesen werden, siehe Abbildung 5.6.

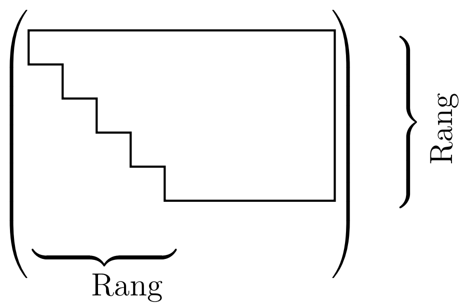


Abbildung 5.6: Rang einer Matrix in Stufenform

Man sieht auch, dass $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$ ist, d. h., Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix stimmen überein.

Satz 5.45. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine gegebene Matrix mit n Spalten. Dann gilt*

$$\underbrace{\dim \operatorname{bild}(A)}_{=\operatorname{rang}(A)} + \dim \operatorname{kern}(A) = n$$

Beispiel 5.46. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\operatorname{kern}(A) = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also $\dim \operatorname{bild}(A) + \dim \operatorname{kern}(A) = 1 + 2 = 3$.

Berechnung von A^{-1} durch das Lösen von Gleichungssystemen. Wir multiplizieren $AA^{-1} = I$ mit dem j-ten Einheitsvektor von rechts und erhalten so ein lineares Gleichungssystem für die j-te Spalte von A^{-1}:

$$A \underbrace{(A^{-1} e_j)}_{=:x} = e_j$$

Wählen wir $j = 1, 2, \ldots, n$, so können wir alle Spalten von A^{-1} unabhängig voneinander als Lösung dieses Gleichungssystems berechnen.

Beispiel 5.47 (Das Gauß-Jordan-Verfahren). Bisher haben wir Vielfache von Zeilen auf darunterliegende addiert, um Nullen zu erzeugen. Beim *Gauß-Jordan-Verfahren* erzeugt man zusätzlich Nullen oberhalb der aktuellen Zeile durch Addition auf darüberliegende Zeilen und erhält so am Ende eine Diagonalmatrix. Wir betrachten als Beispiel die Berechnung der Inversen von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Durch Zeilenoperationen transformieren wir nun die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $AX = I$ auf die Einheitsmatrix.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. □

Invertierbarkeitskriterien für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Satz 5.48. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $Ax = b$ *ist eindeutig lösbar*

(ii) A *ist regulär, d. h.,* A^{-1} *existiert*

(iii) $\operatorname{rang}(A) = n$

(iv) $\operatorname{kern}(A) = \{0\}$, *d. h., das homogene System ist nur trivial lösbar*

(v) $\operatorname{bild}(A) = \mathbb{R}^n$ *(die Spalten von* A *bilden eine Basis des* $\mathbb{R}^n$*)*

(vi) $\det(A) \neq 0$ *(→ Determinanten werden später behandelt)*

Für die Lösbarkeit gilt:

$$Ax = b \text{ ist lösbar} \iff b \in \operatorname{bild}(A) \iff \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$$

Beispiel 5.49 (Berechnung von stöchiometrisch möglichen Reaktionen). Welche Reaktionen sind zwischen den Verbindungen CH_4, H_2O, H_2, CO und CO_2 (rechnerisch) möglich? Als erstes bilden wir eine Matrix, deren Zeilen angeben, wie oft jedes Atom $\{C, H, O\}$ in jedem der fünf Stoffe vorkommt. Diese Matrix transformieren wir in Stufentreppenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 41 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Wir sind nun an ganzzahligen Lösungen der homogenen Gleichung $Ax = 0$ interessiert. Weil $\mathrm{rang}(A) = 3 = 5-2$ ist, gibt es zwei linear unabhängige Lösungen: $x = (-1, -2, 4, 0, 1)^T$ und $x = (-1, -1, 3, 1, 0)^T$. Die zugehörigen Reaktionsgleichungen sind $4\,\mathrm{H_2} + \mathrm{CO_2} \rightleftharpoons \mathrm{CH_4} + 2\,\mathrm{H_2O}$ und $3\,\mathrm{H_2} + \mathrm{CO} \rightleftharpoons \mathrm{CH_4} + \mathrm{H_2O}$.

5.4 Determinanten

Die Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ spannen ein Volumen V auf, für $n = 2$ ist V die Fläche des Parallelogramms, für $n = 3$ ist V das Volumen des Parallelepipeds. Fasst man die Vektoren spaltenweise in einer quadratischen $n \times n$ Matrix A zusammen, so ist $V = \det(A)$ das (vorzeichenbehaftete) Volumen.

Tabelle 5.1: Berechnung der Determinante ($n \leq 3$)

n	$A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$\det(A)$
1	a	a
2	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$ $+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ $-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Definition 5.50 (Antisymmetrische Multilinearform). Eine Funktion $\det\colon \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ heißt *Determinante*, wenn

$$\det(I) = 1 \tag{5.3a}$$
$$\det([\alpha a_1 + \beta b_1, a_2, \dots, a_n]) = \alpha \det([a_1, a_2, \dots, a_n]) + \beta \det([b_1, a_2, \dots, b_n]) \tag{5.3b}$$
$$\det([\dots, a_i, \dots, a_j, \dots]) = -\det([\dots, a_j, \dots, a_i, \dots]). \tag{5.3c}$$

Durch (5.3) ist die Determinante bereits eindeutig festgelegt, für $n \leq 3$ ergibt sich Tabelle 5.1. Die Linearität (5.3b) gilt wegen (5.3c) nicht nur für die erste, sondern für alle Spalten.

Beispiel 5.51.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -2, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 6 + 10 - 6 - 4 = 6$$

Satz 5.52. *(a) Skaliert man eine Spalte mit α, so wird auch die Determinante mit α skaliert. Speziell: Besteht eine Spalte einer Matrix nur aus Nullen, so verschwindet die Determinante.*

(b) Sind zwei Spalten Vielfache voneinander, so verschwindet die Determinante.

(c) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn ein Vielfaches von einer Spalte auf eine andere Spalte addiert wird.

Beweis. (i) Die Aussage ist ein Spezialfall von (5.3b) für $\beta = 0$,

$$\det([\alpha \cdot a_1, a_2, \dots, a_n]) = \alpha \cdot \det([a_1, a_2, \dots, a_n])$$

(ii): Wegen (i) genügt es, zwei gleiche Spalten zu betrachten. Tauscht man die, so erhält man dieselbe Matrix, deren Determinate aber das Negative der Determinante der Ausgangsmatrix sein muss:

$$\det([a_1, a_1, \dots]) = -\det([a_1, a_1, \dots]), \quad \Longrightarrow \det([a_1, a_1, \dots]) = 0.$$

Aussage (iii) ist eine Verallgemeinerung des Prinzips von Cavalieri; sie ergibt sich unmittelbar aus (ii), denn

$$\det([a_1, a_2 + \alpha_1 a_1, \dots]) = \det([a_1, a_2, \dots]) + \det([a_1, \alpha_1 a_1, \dots]) = \det([a_1, a_2, \dots]) + 0.$$

Anschaulich: Das Volumen eines Stapels Bücher ändert sich bei Scherung nicht, mit der Operation $a_2 \mapsto a_2 + \alpha_1 a_1$ wird der schiefe Turm gerade (ohne, dass das Volumen geändert wird). □

Satz 5.53 (Determinantendefinition nach Leibniz)**.**

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

wobei S_n alle Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet und $\operatorname{sgn}(p)$ *das* Signum der Permutation p *ist.*

Bei Prismen ist das Volumen gleich Grundfläche mal Höhe. Die Verallgemeinerung dazu ist der Satz von Laplace:

Satz 5.54 (Entwicklungssatz von Laplace)**.** *Entwicklung nach der j-ten Spalte*

$$\det(A) = (-1)^{j+1}(a_{1j} \det(A_{1j}) - a_{2j} \det(A_{2j}) + \cdots) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

A_{ij} ist diejenige Teilmatrix von A, die durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Analog: Entwicklung nach der i-ten Zeile, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

Beispiel 5.55.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -19 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot (-2) \det \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 43 = -86$$

Beispiel 5.56. Wir entwickeln nach der 4-ten Zeile:

$$\det\begin{pmatrix}4&0&2&0\\0&3&9&2\\5&2&7&4\\2&0&3&0\end{pmatrix} = (-1)(2)\det\begin{pmatrix}0&2&0\\3&9&2\\2&7&4\end{pmatrix} + 0 - 3\det\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&2\\5&2&4\end{pmatrix} = 32 - 96 = -64$$

Für große Matrizen $n > 3$, die wenig Nullen enthalten, ist die Berechnung der Determinante mit Hilfe des Entwicklungssatzes rechenaufwendig. Effizienter ist es, die Matrix durch Zeilen- oder Spaltenoperationen auf Dreiecksform zu bringen und dann die Hauptdiagonalelemente miteinander zu multiplizieren.

Satz 5.57. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix (d. h., $a_{ij} = 0$ für $i > j$). Dann ist die Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente, also:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Beweis. Die Aussage durch $n-1$-maliges Entwickeln nach der ersten Spalte. □

Bemerkung 5.58 (Transformationssatz). Bei Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird die (lokale) Volumenverzerrung durch die Determinante einer Matrix (der Jacobimatrix $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$) beschrieben, es gilt (für Details siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz`) folgende Verallgemeinerung der Substitutionsregel (3.4)

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(\varphi(z)) \left|\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \,dz.$$

Formel für die Inverse

Beispiel 5.59 (Cramersche Regel). $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Dann ist

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)},$$

mit der Matrix $A_k = [a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, a_n]$, die entsteht, indem die k-te Spalte von A durch die rechte Seite b ersetzt wird.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Suche $X = A^{-1}$. Also ist $AX = I$. Die j-te Spalte dieses Gleichungssystems ist $Ax_j = e_j$. Mit der Cramerschen Regel erhalten wir das (i,j) Element von A^{-1}, indem wir in A die i-te Spalte durch e_j ersetzen, d. h.,

$$a^{-1}_{ij} = \frac{\det([a_1, \ldots, e_j, \ldots, a_n])}{\det(A)}.$$

Die i-te Spalte hat nur eine 1, und wir können entwickeln

$$a^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

wobei die Matrix A_{ji} aus A entsteht, indem man die j-te Zeile und die i-te Spalte streicht.

Beispiel 5.60.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 21 & -15 \\ 0 & -18 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Satz 5.61 (Multiplikationssatz)**.** *Für zwei quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ gilt*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für Dreiecksmatrizen: Seien $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ rechte obere Dreiecksmatrizen. Dann gilt

$$\det(\widehat{A}) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{a}_{ii}, \quad \text{und} \quad \det(\widehat{B}) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{b}_{ii}.$$

Da $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ auf der Hauptdiagonalen die Einträge $\widehat{a}_{ii} \cdot \widehat{b}_{ii}$ hat, gilt $\det(\widehat{A} \cdot \widehat{B}) = \det(\widehat{A}) \cdot \det(\widehat{B})$. Eine beliebige Matrix A transformieren wir mithilfe von Zeilenoperationen auf rechte obere Dreiecksgestalt, $L \cdot A = \widehat{A}$. Dabei ist $\det(L) = 1$ oder $\det(L) = -1$ (abhängig vom Signum der Zeilenvertauschungen) und $\det(A) = \det(L) \cdot \det(\widehat{A})$. Auf B wenden wir analog Spaltenoperationen an, $BR = \widehat{B}$. Die Transformationsmatrizen L und R werden nun von außen an das Produkt $A \cdot B$ multipliziert. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det(L) \cdot \det(LA \cdot BR) \cdot \det(R) = \det(L) \cdot \det(\widehat{A} \cdot \widehat{B}) \cdot \det(R) \\ &= \det(L) \cdot \det(\widehat{A}) \cdot \det(\widehat{B}) \cdot \det(R) = \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned}$$

□

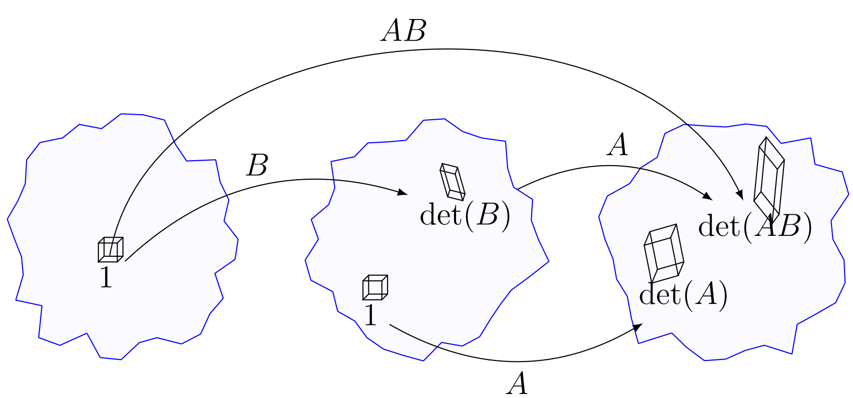


Abbildung 5.7: Determinantenmultiplikationssatz. Abbildung B vergrößert alle Volumen um den Faktor $\det(B)$, Abbildung A um den Faktor $\det(A)$, folglich vergrößert $A \cdot B$ um $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Beispiel 5.62 (Beweis der Cramerschen Regel mittels des Determinatenmultiplikationssatzes). Aus

$$\det(A(I - e_i e_i^T) + b e_i^T) = \det(A(I - e_i e_i^T) + Axe_i) = \det(A) \cdot \det(I + (x - e_i)e_i^T) = \det(A) \cdot x_i$$

folgt $x_i = \det(A)^{-1} \det(A$ mit i-ter Spalte durch b ersetzt$)$.

Kreuzprodukte als Determinanten

Formal gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.63. Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert* zum *Eigenvektor* $v \in \mathbb{C}^n$ mit $v \neq [0, \ldots, 0]^T$, wenn die Gleichung

$$Av = \lambda v \tag{5.4}$$

erfüllt ist.

Satz 5.64. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann gilt:*

(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$ ist.

(ii) Jede Matrix A hat n Eigenwerte (wobei mehrfache Eigenwerte auftreten können).

(iii) Wenn v ein Eigenvektor ist, dann ist auch αv für alle $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor.

Bemerkung 5.65. Die Eigenvektorgleichung (5.4) hat für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ stets die triviale Lösung $v = [0, \ldots, 0]^T$; für diese interessiert man sich jedoch nicht.

Beispiel 5.66. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$. Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Durch anschließendes Lösen der Eigenvektorgleichung (5.4) erhält man $v_1 = (1, 1)^T$ und $v_2 = (1, -1)^T$.

Beispiel 5.67 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (0, 0, 1)^T, v_2 = (-2, 1, 0)^T, v_3 = (-3, 2, 1)^T.$$

Setzt man

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so gilt

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten

(a) Die Eigenwerte von A und A^T sind gleich. Beweis: $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$. Die Eigenvektoren von A und A^T sind i. Allg. *nicht* gleich.

(b) Angenommen, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ hat n linear unabhängige Eigenvektoren (d. h., zu jedem q-fachen Eigenwert gibt es q Eigenvektoren). Dann ist

$$A \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_n]}_{=:V} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] D$$

mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Also ist $A^m = VD^mV^{-1}$

(c) Die Eigenwerte von A und $V^{-1}AV$ sind gleich. Beweis: $\det(A - \lambda I) = \det(V^{-1}AV - \lambda V^{-1}V) = \det(V^{-1}AV - \lambda I)$.

(d) A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte ungleich null sind.

(e) Die Eigenwerte von A^{-1} sind Eins durch die Eigenwerte von A.

(f) Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander. Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Eigenwerte reell sind. Transponiert und konjugiert man $Av = \lambda v$, so ergibt sich $\overline{v}^T A = \overline{\lambda}\overline{v}^T$. Also ist $\overline{v}^T Av = \overline{\lambda}\overline{v}^T v$. Multipliziert man die Ausgangsgleichung von links mit $\overline{v}^T$ erhält man $\overline{v}^T Av = \lambda \overline{v}^T v$. Beides zusammen ergibt $\overline{\lambda} = \lambda$. Als zweites zeigen wir, dass die Eigenvektoren orthogonal sind: Sei $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$. Dann ist $w^T Av = \lambda w^T v = \mu w^T v$. Mit $\mu \neq \lambda$ folgt $w^T v = 0$. $\square$

Beispiel 5.68 (Lokale Extrema im $\mathbb{R}^2$). Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla f(x,y) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.69 (Die Fibonacci-Folge). Durch $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ erhält man die Folge der Fibonacci-Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

Mit Matrizenrechnung wollen wir nun eine Formel für das n-te Glied der Reihe bestimmen. Wir bilden $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und erhalten wegen $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Beziehung $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. Um A auf Diagonalform zu transformieren berechnen wir die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \left(\sqrt{5} \pm 1\right)/2$ und die Eigenvektoren $v_1 = (\lambda_1, 1)^T$ und $v_2 = (\lambda_2, 1)^T$. Mit $V = [v_1, v_2]$ gilt $V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Wir erhalten schließlich die *Formel von Binet*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad \square$$

5.6 Eigenfrequenzanalyse einer schwingenden Membran

Sei $u(t, x, y)$ die Auslenkung eines dünnen, L-förmigen Bleches zur Zeit t im Punkt (x, y). Wir nehmen an, dass u die biharmonische Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(t, x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{5.5}$$

zu den Randbedingungen $u(t, x, y) = 0$ für $(x, y) \in \partial\Omega$ erfüllt. Wir diskretisieren im Ort mit äquidistantem Gitter $U_{i,j}(t) = u(t, i \cdot h, j \cdot h)$. Der Differentialoperator in Δ^2 in (5.5) wird durch den Differenzenstern

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & 8 & 2 & \\ 1 & 8 & -20 & 8 & 1 \\ & 2 & 8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

approximiert. Wir erhalten ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung $U''(t) = -AU$ mit einer symmetrischen Matrix A. Alle Eigenwerte von A sind reell und wir können diagonalisieren $A = VDV^{-1}$ mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. Wir transformieren $W = V^{-1}U$ und erhalten die Lösung des entkoppelten Systems $W''(t) = -DW$ aus den skalaren Gleichungen (vgl. (3.6))

$$w_i''(t) = -\lambda_i^2 w_i, \quad w_i'(0) = 0, \quad w_i(0) = w_{i,0}$$

in der Form $w_i(t) = \cos(\sqrt{\lambda} t) w_{i,0}$. Die Grundschwingungen, aus denen sich das Systemverhalten additiv zusammensetzen lässt, ergeben sich aus den Eigenvektoren V_i, die zugehörige Schwingungsfrequenz ist $\sqrt{\lambda_i}$.

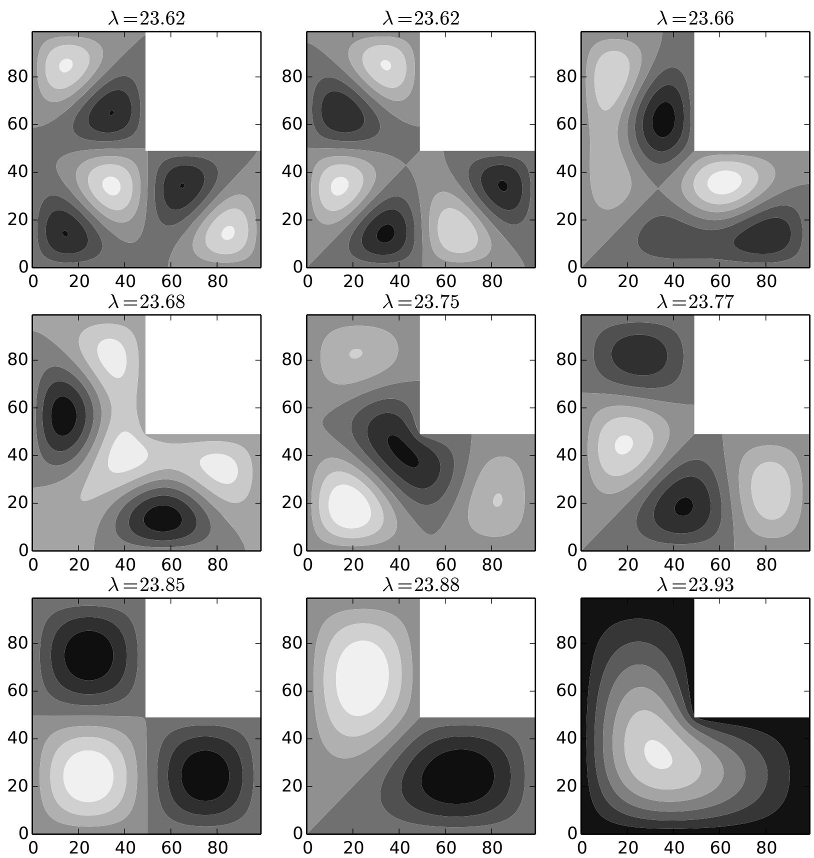


Abbildung 5.8: Eigenfunktionen eines dünnen, L-förmigen Bleches

Anhang A

Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie x:

(a) $5x^2 - 10x - 15 = 0$

(b) $(x^2 - y)(x + a)\dfrac{1}{x^2} = 0$

(c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4^{y-2}$

(d) $2 + \sqrt{x + 4} = x$

(e) $\log_x 4 = 3a$

(f) $\sin x = \ln x$ (auf 3 Stellen)

Aufgabe 2. Stellen Sie die Gleichung $U_{\text{ges}} = \frac{U_1 - U_2}{1 + (\frac{x}{x_0})^p} + U_2$ nach x um.

Aufgabe 3 (Sinus Hyperbolicus und Areasinus Hyperbolicus). Lösen Sie nach x bzw. y auf:

(a) $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

(b) $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Aufgabe 4. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen?

(a) $(x - 1)(x - 2) \leq 0$

(b) $|x + 1| < 5$

(c) $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{100}$

Aufgabe 5. Beweisen Sie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, $\quad (a, b > 0)$.

Aufgabe 6. (a) Angenommen, eine Bakterienpopulation $N(t)$ wächst exponentiell, $N(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$. Nach welcher Zeit t verdoppelt sich die Population, falls es zwei Stunden bis zur Verzehnfachung dauert?

(b) Bei welchem Zinssatz x dauert es 25 Jahre bis zur Kapitalverdoppelung?

Aufgabe 7. Vereinfachen Sie durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen den Term

$$(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3).$$

Aufgabe 8. Erweitern Sie geeignet, so dass der Nenner rational wird, und vereinfachen Sie anschließend:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{5} + 1}$

Aufgabe 9. Sei $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 1 - i$. Berechnen Sie:

(a) $z_1 + z_2$ (b) z_1/z_2 (c) z_2/z_1 (d) $|z_2|$ (e) z_1^4

Stellen Sie z_1 und z_2 in trigonometrischer Form $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dar.

Aufgabe 10. Zeigen Sie für $z, z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(b) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

(c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Aufgabe 11. Bestimmen Sie alle Lösungen von: (a) $z^3 = 1$ und (b) $z^2 = -8i$

Aufgabe 12. Berechnen Sie

(a) $\ln(i)$ (b) $\arg(\cos(1 - i))$ (c) e^{e^i} (d) $\sqrt[1+i]{1 + i}$.

Aufgabe 13. Geben Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich, den Wertebereich und das Monotonieverhalten an:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = |x - a|$ (c) $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$ (d) $f(x) = x/(1 + x)$

Aufgabe 14. Sei $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$, $g(x) = x + 1$ und $h(x) = x^{-1}$. Berechnen Sie folgende Funktionen:

(a) $f \circ g$ (b) f^{-1} (c) $f \circ g^{-1}$ (d) $h^{-1} \circ f$

Aufgabe 15. Skizzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f(x) = \sin(x + \pi/4)$ (b) $f(x) = \sin(2x)$ (c) $f(x) = \sin(1/x)$

Aufgabe 16. Geben Sie ein Polynom 3. Grades mit den Nullstellen -2, 2, 4 an.

Aufgabe 17. Berechnen Sie mit Polynomdivision $(x^3 + 4x^2 - 33x + 4) : (x - 4)$.

Aufgabe 18. Von einem funktionalen Zusammenhang sind folgende Werte bekannt:

x	1	2	3
y	4	2	1

Berechnen Sie

(a) eine quadratische Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und

(b) eine rationale Funktion $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$,

die diese Punkte enthält. Berechnen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 2.5$.

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{5x-1} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{1-x\arctan x} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} \qquad \text{(d)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{1/n},$$

dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$

Aufgabe 20. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 21. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)}\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t+2e^{\frac{t}{2}}}{3t+5\sqrt{e^t}} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{y\to 2}\frac{e^{y^2}(y-2)}{y^3-3y^2+2y}$$

Aufgabe 22. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen im Punkt $x = 0$

$$\text{(a)}\quad y=\frac{1}{1+e^{1/x}} \qquad \text{(b)}\quad y=e^{-1/x^2} \qquad \text{(c)}\quad y=\tan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(d)}\quad y=x\sin x^{-1}$$

Aufgabe 23. Bestimmen Sie das lokale Maximum x_a der parameterabhängigen Funktion

$$f(x)=3\,\frac{\ln x+a}{x}, \quad a\in\mathbb{R}.$$

Skizzieren Sie die Kurve $H_a := \{(x_a, f(x_a)) : a \in [1,2]\}$. Durch welche Funktion $y = h(x)$ wird diese Kurve erzeugt?

Aufgabe 24. Für welche Zahl a ist die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & \text{für} \quad x\neq 1,\\ a, & \text{für} \quad x=1\end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig?

Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{für} \quad x\leq 1,\\ x & \text{für} \quad x>1\end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 26. Berechnen Sie die erste Ableitung nach x von

$$\text{(a)}\quad \frac{3x-1}{x+2} \qquad \text{(b)}\quad x^{\ln x} \qquad \text{(c)}\quad \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \qquad \text{(d)}\quad \ln\left(x+\sqrt{b^2+x^2}\right)$$

Aufgabe 27. Sei $f(x) = e^{a\ln x}$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$, und leiten Sie daraus eine Formel für die Ableitung einer Potenz x^a her.

Aufgabe 28 (Ableitung der Umkehrfunktion)*.* Zeigen Sie, unter Verwendung von $(\sin x)' = \cos x$, dass $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ ist.

Aufgabe 29*.* Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{(a)}\quad \lim_{y\to 2}\frac{\ln(y^2-3)}{y^3-7y+6}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{a\to b}\frac{e^{bx}-e^{ax}}{be^{bx}-ae^{ax}}\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{\ln(x+e^x)}\qquad \text{(d)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{1-x-\ln x}$$

Aufgabe 30*.* Berechnen Sie die 3. Ableitung von:

$$\text{(a)}\quad x^2+\frac{\pi}{\sqrt{5b}}x-121\qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{2}(\ln x)^2\qquad \text{(c)}\quad \ln(\cos(x))\qquad \text{(d)}\quad xe^x\qquad \text{(e)}\quad \frac{x}{1-x}$$

Aufgabe 31*.* Führen Sie eine Kurvendiskussion durch:

$$\text{(a)}\quad y = 8x^3(3x-2)^{-2}\qquad \text{(b)}\quad y = \left(x^2+x-1\right)e^{-x}$$

Aufgabe 32*.* Skizzieren Sie die Hill-Funktion $H_n(t) = 1/(1+t^{-n})$ (vgl. Seite 25) für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 4$. Gibt es Wendepunkte?

Aufgabe 33*.* Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ das Taylorpolynom $T_4(h)$ an der Stelle $x = 0$ und berechnen Sie die Abweichung $|f(\frac{1}{2}) - T_4(\frac{1}{2})|$.

Aufgabe 34*.* Bestimmen Sie die Taylorreihen für die Funktionen

(a) $f(x) = 1/(x+3)$ im Punkt $x = 0$,

(b) $g(x) = x^4$ im Punkt $x = -1$ und

(c) $h(x) = e^{x^2}$ im Punkt $x = 0$.

Wie groß ist jeweils der Konvergenzradius?

Aufgabe 35*.* Sei q eine feste komplexe Zahl. Setze

$$S_n(q) = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Vereinfachen Sie den Ausdruck $S_n(q) - qS_n(q)$, und leiten Sie daraus eine Formel für $S_n(q)$ her. Für welche q existiert $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(q)$?

Aufgabe 36*.* Berechnen Sie näherungsweise mit dem Newtonverfahren die Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$(a)\quad f(x) = \sin(x),\quad \text{Startwert}\quad x_0 = 3,\qquad (b)\quad f(x) = x^5-x-1,\quad \text{Startwert}\quad x_0 = 1$$

Aufgabe 37*.* Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen für:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{(x+1)(x-1)}\qquad \text{(b)}\quad \frac{x}{(x+1)(x-1)}\qquad \text{(c)}\quad \frac{x-1}{x(x-2)}\qquad \text{(d)}\quad \frac{(x+7)}{x^3(x+1)}$$

und berechnen Sie $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$.

Aufgabe 38. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int \arctan x\,dx$ mittels partieller Integration.

Aufgabe 39. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \qquad \text{(c)} \int \frac{\ln x}{x^{1/3}}\,dx, \qquad \text{(d)} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

Aufgabe 40. Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

$$\text{(a)} \int \frac{x^3}{(x^2-1)(x+2)}\,dx, \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx, \qquad \text{(c)} \int \frac{x+2}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx$$

Aufgabe 41. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx, \qquad \text{(b)} \int_3^8 \frac{4}{x^2-6x+34}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_0^1 xe^{x^2}\,dx, \qquad \text{(d)} \int_0^1 xe^{x^2}e^{e^{x^2}}\,dx$$

Aufgabe 42. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

Aufgabe 43. Berechnen Sie den Wert folgender uneigentlicher Integrale, sofern diese einen endlichen Wert haben:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty xe^{-x}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Aufgabe 44. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse:

(a) $y = \sin x$ unter einem Kurvenbogen

(b) $y = (3-x)\sqrt{x}$ zwischen den Nullstellen

Aufgabe 45. Berechnen Sie das Volumen der Körper, die durch Rotation folgender Kurven um die x Achse entstehen:

(a) Parabel $y(x) = 1 - x^2, \quad -1 \le x \le 1,$

(b) Astroide $x(t) = (\cos t)^3, \quad y(t) = (\sin t)^3, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Aufgabe 46. Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$y(x) = x^{3/2} \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{4}{3}$$

exakt und mit Hilfe der Fassregel.

Aufgabe 47. Berechnen Sie näherungsweise die folgenden bestimmten Integrale mit der Trapezregel und der Simpsonregel durch Unterteilung in $1, 2$ und 3 Teilintervalle:

$$(a) \quad \int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad (b) \quad \int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Aufgabe 48. Geben Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ folgender Differentialgleichungen an:

(a) $y'(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, (b) $y'(t) = 10 \cdot \dfrac{y(t)}{t}$, (c) $y'(t) = \sin t \cdot y(t)^2$, (d) $y'(t) = \dfrac{e^t}{y(t)}$

Aufgabe 49. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = -y(t) + e^t$$

durch Variation der Konstanten. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt, und stellen Sie $y(t)$ grafisch dar (Hinweis: „Kettenfunktion", $y(t) = \cosh t$).

Aufgabe 50. Bei der enzymatischen Reaktion $S + E \xrightarrow{k_1} ES \xrightarrow{k_2} E + P$ wird ein Substrat S mit Hilfe eines Enzyms E über ein Enzym-Substrakt-Komplex schließlich zu einem Produkt P umgewandelt (Michaelis-Menten-Kinetik). Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem $y'(t) = f(y(t))$, $y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$ für die zeitabhängigen Konzentrationen $y_1(t) = [S]$, $y_2(t) = [E]$ und $y_3(t) = [ES]$ auf.

Aufgabe 51. Sei $z = 3 - 4i = re^{i\varphi}$.

(a) Berechnen Sie r und φ.

(b) Ermitteln Sie den Real- und Imaginärteil der beiden Wurzeln w mit $w^2 = z$.

Aufgabe 52. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - x^2 + x}{\cos x - 1} \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to 1} \frac{\cos(y-1) - 1}{(\ln y)^2}$$

Aufgabe 53. Wenden Sie das Newtonverfahren auf die Funktion $f(x) = xe^x - 2$ an. Wie lautet die Iterationsvorschrift? Verwenden Sie die Startnährung $x_0 = 1$ und berechnen Sie drei Iterationsschritte, und geben Sie x_1, x_2 und x_3 an.

Aufgabe 54. Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $u = \sin x$ das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cos x \, dx.$$

Aufgabe 55. (a) Berechnen Sie

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 t \; dt$$

mittels partieller Integration. Hinweis: $u(t) = \cos t$ und $v'(t) = \cos t$ und $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$.

(b) Berechnen Sie das Integral I nährungsweise unter Verwendung der Fassregel, und geben Sie die Abweichung zum exakten Wert an.

Aufgabe 56. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{y(t) - 1}{(t+1)(t-2)}$$

durch Trennung der Variablen.

Aufgabe 57. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich folgender Funktionen an (Skizze!):

$$\text{(a)} \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x - y} \qquad \text{(b)} \quad z = \sqrt{y - \ln x} + \sqrt{1 - x - \ln y}$$

Aufgabe 58. Geben Sie die Menge aller Werte (x, y) an, für die die folgenden Funktionen nicht negativ sind:

$$\text{(a)} \quad z = \ln(x^2 + y^2) \qquad \text{(b)} \quad z = xy - \frac{x}{y}$$

Aufgabe 59. Zeichnen Sie in der x-y-Ebene die Höhenlinien der folgenden Funktionen, und beschreiben Sie davon ausgehend den Verlauf der durch die Funktion gegebenen Fläche.

$$\text{(a)} \quad z = 2x - y + 1 \qquad \text{(b)} \quad z = y - x^2 \qquad \text{(c)} \quad z = \frac{y}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 60. Bestimmen Sie die Funktion $f(x, y)$, wenn gilt

$$f(x + y, x - y) = xy + y^2,$$

berechnen Sie anschließend $f(y, y)$ und $f(y, -y)$.

Aufgabe 61. Zeigen Sie, dass

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ist. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion u für festes t in Abhängigkeit von x.

Aufgabe 62. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $f = x^2 + 2e^{xy} + y$

Aufgabe 63. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$u = x^2 y + xz + y \ln z + x - 2 \ln y.$$

Berechnen Sie im Punkt $(2, 1, 1)$ die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $(3, 2, 2)$.

Aufgabe 64. Berechnen Sie die lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen $u(x, y)$.

$$\text{(a)} \quad u = x^2 y(2 - x - y), \quad x > 0, \quad y > 0, \qquad \text{(b)} \quad u = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2.$$

Aufgabe 65. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u = y \ln(x^2 - y^2)$ und $u = y \exp(x^2 - y^2)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$$

sind.

Aufgabe 66. Berechnen Sie die Ableitung der impliziten Funktion $\frac{dy}{dx}$ von $y(x)$ implizit gegeben durch $xy - \ln y - 2 = 0$ im Punkt $(x, y) = (2, 1)$.

Aufgabe 67. Berechnen Sie die Ableitung $y'(x)$ für die impliziert gegebene Funktion mit $y^2 + 3x^2 - 7xy - 1 = 0$ im Punkt $(x, y) = (1/\sqrt{3}, 0)$.

Aufgabe 68. Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = (x - 1)^2 - 2\,y^2$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 69. Für reale Gase gilt die Gleichung

$$F(p, V, T) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT = 0.$$

Das Volumen V ist also abhängig von dem Druck p und der Temperatur T, also $V = V(p, T)$. Wie groß ist die Volumenänderungen ΔV bei kleinen Druckänderungen Δp und kleinen Temperaturschwankungen ΔT? Bestimmen Sie das totale Differential $dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial T} dT$.

Aufgabe 70. Bestimmen Sie das lokale Extremum der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = y - x - 1 = 0$.

Aufgabe 71. Untersuchen Sie $f(x, y, z) = x\,y\,z$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0$ und $\varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 72. Gegeben ist ein Kreis mit Radius eins um den Koordinatenursprung. Geben Sie drei verschiedene Parameterdarstellungen für die Kreislinie im ersten Quadraten an. Berechnen Sie die Länge L des Kreisbogens als Kurvenintegral 1. Art.

Aufgabe 73. Stellen Sie fest, ob die Differentialform

$$2x\,(x + 2y)\,dx + (2x^2 - y^2)\,dy$$

ein vollständiges Differential ist. Wenn ja, dann berechnen Sie die zugehörige Gesamtheit der Stammfunktionen.

Aufgabe 74. Berechnen Sie das Integral $I = \int_K xy\,dx + (y - x)\,dy$, wobei K das Stück der Parabel $y = x^2$ von Anfangspunkt $(0, 0)$ bis zum Endpunkt $(1, 1)$ ist.

Aufgabe 75. Der Flächeninhalt F des von einer geschlossenen Kurve K begrenzten Gebiets kann als Kurvenintegral 2. Art berechnet werden. Es gilt $F = \frac{1}{2} \int_K x\,dy - y\,dx$. Leiten Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhaltes von Kreisen her.

Aufgabe 76. Berechnen Sie die Stammfunktion zum Kurvenintegral 2. Art

$$\int_K (P\,dx + Q\,dy), \quad \text{mit} \quad P = \frac{1 - y^2}{(1 + x)^3} \quad Q = \frac{y}{(1 + x)^2}.$$

Aufgabe 77. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I = \int_K P\,dx + Q\,dy, \quad \text{mit } P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

entlang des Weges $x = \cos t$, $y = \sin t$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 78. Berechnen Sie die Bogenlänge einer Schraubenlinie $x = R\cos t, y = R\sin t, z = ct$ für einen Umlauf.

Aufgabe 79. Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden windschiefen Geraden g_1 und g_2 gegeben durch

$$g_1 : y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 80. Für welchen Parameter λ sind die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

(a) senkrecht und (b) parallel zueinander.

Aufgabe 81. Man beweise die „zweite Form“ $|x - y| \geq ||x| - |y||$ der Dreiecksungleichung.

Aufgabe 82. Man zeige, dass das System der Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

linear abhängig ist.

Aufgabe 83. Man zeige, dass das System der Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet und stelle die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von x und y dar.

Aufgabe 84. Der Vektor $x = (1, 2, 3)^T$ werde mittels einer durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung in einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und dieser mittels einer durch die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung in einen Vektor c abgebildet. Man überzeuge sich, dass die Produktabbildung $a \to c$ durch die Matrix $C = B \cdot A$ vermittelt wird.

Aufgabe 85. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $A - 3B$, $A^T B$ und $B^T AC$.

Aufgabe 86. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine Matrix B an, so dass $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und gleichzeitig $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 87. Man zeige, dass folgende Matrix orthogonal ist: $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Aufgabe 88. Man bestimme die allgemeine Form einer Matrix A, so dass $AB = BA$ mit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt, vgl. `https://de.wikipedia.org/wiki/Sylvester-Gleichung`.

Aufgabe 89. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 34 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 90. Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$ und des inhomogenen Systems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 91. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 92. Man gebe an, aus welchem Intervall die Zahl a gewählt werden muss, damit in der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= a \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$$

x und y positiv sind.

Aufgabe 93. Man bestimme für die beiden Gleichungssysteme $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 7 & 8 & -6 & -17 \\ -4 & -6 & 2 & 14 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 12 \\ -63 \\ 46 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung. Wie groß sind die Ränge der Matrizen A, (A, b_1) und (A, b_2) und die Dimension des Nullraums $\operatorname{kern}(A)$? Man gebe zwei verschiedene Basen des letzteren an.

Aufgabe 94. Man berechne die Inversen der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 95. Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -8 & 25 & -41 \\ 4 & -20 & 29 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

indem man zunächst die Inverse von A und dann $x = A^{-1} \cdot b$ berechnet.

Aufgabe 96. Man gebe die Determinanten der folgenden Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -19 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & \pi & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 97. Man berechne das Kreuzprodukt $z = x \times y$ von $x = (1,2,3)^T$ und $y^T = (-1,1,2)^T$ über die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 98. Man löse mit Hilfe der Cramerschen Regel

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 11 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 99. Man bestimme die stöchiometrischen Koeffizienten für mögliche Reaktionen in den Stoffsystemen

(a) HCl, $KMnO_4$, H_3AsO_3, H_3AsO_4, $MnCl_2$, KCl, H_2O

(b) $K_2Cr_2O_7$, H_2S, H_2SO_4, K_2SO_4, $Cr_2(SO_4)_3$, H_2O, S

Aufgabe 100. Man berechne zu folgenden Matrizen die Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 101. Lösen Sie das Minimierungsproblem $\min_x |Ax - b|^2$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 102. Eine reelle Matrix S heißt *schiefsymmetrisch*, falls $S = -S^T$ gilt. Man beweise, dass die Eigenwerte von S imaginär sind, d.h. $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$. Man zeige weiter, dass die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten zueinander orthogonal sind.

Klausur „Mathematik I“ vom 4. Februar 2011

Aufgabe 103 (4 Punkte). Sei $z = 1 + i$ mit $i^2 = -1$.

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $1/(1 + z^2)$.

(b) Berechnen Sie die exponentielle Darstellung von z, und bestimmen Sie damit alle Lösungen der Gleichung $1/(1+w^2) = i$.

Aufgabe 104 (4 Punkte). Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\ln(\pi/x)}{x-\pi}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{t\to\infty} \sqrt{t^2 e^{-t} + e}.$$

Aufgabe 105 (4 Punkte). Ein quadratisches Polynom $p(t) = a+bt+ct^2$ erfülle die Bedingungen

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 3, \quad \text{und} \quad \int_0^1 p(t)\,dt = 4.$$

Bestimmen Sie den Wert des Polynoms an der Stelle $t = 1/2$, also $p(1/2)$.

Hinweis: Für eine elegante Lösung lässt sich ausnutzen, dass die Fassregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert.

Aufgabe 106 (3 Punkte + 3 Zusatzpunkte). Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen des Rotationskörpers der entsteht, wenn die Funktion $y(x) = \sin(x)$ mit $0 \le x \le \pi$ um die x-Achse rotiert. Verwenden Sie hierfür die Trapezregel mit $N = 4$ Teilintervallen ($[0,\pi/4]$, $[\pi/4,\pi/2]$, $[\pi/2,3\pi/4]$ und $[3\pi/4,\pi]$).

Zusatz: Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

Aufgabe 107 (5 Punkte). Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten:

$$y'(t) = -2\frac{y(t)}{t} - \frac{1}{t^3}, \quad t > 0.$$

Klausur „Mathematik II“ vom 17. Juli 2015

Aufgabe 108 (4 Punkte und 2 Zusatzpunkte). Weisen Sie nach, dass das Kurvenintegral

$$\int_K (y+1)e^{x\cdot(y+1)}\,dx + (xe^{x\cdot(y+1)} + 1)\,dy$$

wegunabhängig ist. Geben Sie eine zugehörige Stammfunktion $F(x,y)$ an, und verwenden Sie diese, um den Wert des Integrals für den Weg K, gegeben durch $x = t^2$ und $y = -t$, $t \in [0,1]$, zu berechnen.

Zusatz: Sei $y(x)$ Lösung zum Anfangswertproblem $y(0) = 1$ für die exakte Differentialgleichung

$$(y(x)+1)e^{x\cdot(y(x)+1)} + (xe^{x\cdot(y(x)+1)} + 1)\,y'(x) = 0.$$

Bestimmen Sie $y(1)$ näherungsweise.

Aufgabe 109 (4 Punkte). Sei $F(x,y,z) = (x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 26$. Bestimmen Sie die partielle Ableitung z_y der durch $F(x,y,z(x,y)) = 0$ implizit definierten Funktion $z(x,y)$ im Punkt $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

Aufgabe 110 (4 Punkte). Bestimmen Sie α, β und γ, so dass

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 111 (4 Punkte). Bestimmen Sie x und y, so dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -y-1 \\ y+3 & x-2 \end{pmatrix}$$

minimal wird.

Aufgabe 112 (4 Punkte). Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und einen Eigenvektor zum reellen Eigenwert.

Index