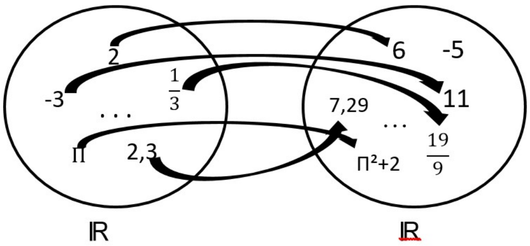
# Abbildungen

Aus der Schule kennt man den Begriff der Funktion. Eine Funktion sieht zum Beispiel so aus: $f(x) = x^2 + 2$. Für verschiedene Argumente (x-Werte) kann man den Funktionswert berechnen:

$f(2) = 6, f(-3) = 11, \ldots$ Doch was passiert hier eigentlich? Wir setzen eine Zahl für $x$ ein (z.B. 2) und erhalten eine „neue“ Zahl (6). Man kann sagen: Der Zahl 2 wird die Zahl 6 zugeordnet. Oder: Die 2 wird auf die 6 abgebildet. Deshalb spricht man auch oft von Abbildungen statt Funktionen. Anschaulich könnte man die Funktion so darstellen:




Da wir eine reelle Zahl einsetzen können und eine reelle Zahl erhalten, handelt es sich um eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Deshalb liest man oft Sätze wie: „Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$“ (sprich: „*f von R nach R*“). Warum muss das extra betont werden? Das erfährst du, wenn du weiterliest.

Man kann natürlich nicht nur reelle Zahlen, sondern alles Mögliche abbilden. Zum Beispiel könnte man Vektoren auf Zahlen abbilden (also jedem Vektor eine Zahl zuordnen). Zum Beispiel so:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1$ (Jeder Vektor wird auf seine erste Komponente abgebildet. Also: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf 2, $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf 6,…) Statt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1$ kann man natürlich auch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$ schreiben, falls einem das lieber ist. Es handelt sich bei dieser Funktion also um eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Vektoren mit zwei reellen Zahlen als Einträge.

Was genau ist nun eine Abbildung? Wir haben gesehen, dass bei einer Abbildung einem Element aus einer Menge ein Element aus einer anderen Menge (oder auch der selben) zugeordnet wird. Damit es sich aber um eine Abbildung/Funktion im mathematischen Sinne handelt, müssen zwei Dinge erfüllt sein:

1. Wirklich jedes Element aus der ersten Menge muss abgebildet werden. (Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zum Beispiel keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (da die 0 nicht abgebildet werden kann), sondern nur eine Funktion von $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nach $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (sprich: „*R ohne Null*“) ist die Menge aller reellen Zahlen, die ungleich Null sind.)
2. Jedem Element aus der ersten Menge muss genau ein Element aus der zweiten Menge eindeutig zugeordnet werden. (Es ist also nicht „erlaubt“, dass eine Abbildung die Zahl 2 sowohl auf die 5 als auch auf die 10 abbildet. Bitte nicht verwechseln: Natürlich ist es möglich, dass 2 verschiedene Elemente aus der 1. Menge auf dasselbe Element der 2. Menge abgebildet werden. Die Funktion $x^2$ bildet schließlich auch die 2 **und** die -2 auf die 4 ab.)

Eine Abbildung kann in der Mathematik also zum Beispiel so definiert werden:

Seien zwei nichtleere Mengen D und M gegeben. Eine Abbildung/Funktion $f: D \to M$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $d \in D$ genau ein Element $m \in M$ eindeutig zuordnet. In dem Fall schreibt man $f(d) = m$. $D$ wird als Definitionsbereich und $M$ als Bildbereich oder Wertevorrat bezeichnet.

Wenn man die farblichen Markierungen in der Definition mit dem Text darüber vergleicht, erkennt man, wie wichtig jedes einzelne Wort der Definition ist. Ihr solltet auch bei den Definitionen in der Vorlesung auf jedes kleinste Detail achten und über dessen Sinn nachdenken!