Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 7

Abgabe: bis Montag 12.12.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (25 Punkte): Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichmäßig elliptisch, $b \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), c \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), h \in H^1(\Omega)$ und es gelte

$$c \geq \frac{1}{2}\nabla \cdot b \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass dann genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

existiert.

Hinweis: Passen Sie den Beweis der Garding-Ungleichung aus der Vorlesung an.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass für $f \in L^2(\Omega)$ der distributionelle Gradient $\nabla f \in H^{-1}(\Omega)$ erfüllt.

Aufgabe 3 (20 Punkte): Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B \in L^2(\Omega \times \Omega)$ und $\lambda > \|B\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.
Zeigen Sie: Zu $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau ein $u \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega B(x,y)u(y)\,dy \;=\; \lambda u(x) + f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Hinweis: Definieren Sie eine passende Bilinearform und wenden Sie den Satz von Lax-Milgram an.

Aufgabe 4 (25 Punkte): ()
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einem C^2-Rand. Für $f \in L^2(\Omega)$ betrachten Sie das Bi-Laplace-Problem

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f \quad &\text{in } \Omega\,, \\ u = 0 \ \text{ und } \ \partial_\nu u = 0 \ &\text{ auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{0.1}$$

(a) Formulieren Sie eine Definition der schwachen Lösung mit Hilfe einer geeigneten symmetrischen Bilinearform auf $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie: Ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung im Sinne von (a), so ist u auch eine klassische Lösung.

(c) Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$.

Hinweis: $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$. *Um die Koerzivität der Bilinearform zu zeigen, verwenden Sie folgende Regularitätsabschätzung: Für alle* $v \in H_0^1(\Omega)$ *mit* $-\Delta v = f_0$ *gilt die Abschätzung* $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\, \|f_0\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 5 (25 Punkte): (*Existenz der Green'schen Funktion in* H^1) Beweisen Sie Satz III.7 (a) aus der Vorlesung für den Fall, dass Ω Lipschitz-Rand hat. Also zeigen Sie, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand und für jedes $x \in \Omega$ eine eindeutige schwache Lösung $w(x, \cdot) \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} \Delta_y w(x,y) &= 0,\ y \in \Omega, \\ w(x,y) &= -\Phi(x-y),\ y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

existiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Randwerte als Spur einer $H^1(\Omega)$*-Funktion dargestellt werden können. Modifizieren Sie dafür* Φ *in der Nähe der Singularität, indem Sie die Funktion in einer Umgebung von* x *konstant setzen.*