Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 2

Abgabe: bis Montag 7.11.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (30 Punkte): (*Glättung (mollification).*) Es sei $\rho(t) := c_n e^{-\frac{1}{1-t^2}}$ für $t \in [-1,1]$ und $\rho(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ mit einer Normierungskonstanten $c_n \in \mathbb{R}$, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir den Glättungskern $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\rho_\varepsilon(x) := \rho(\tfrac{|x|}{\varepsilon})\varepsilon^{-n}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\rho_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Falls $\mathrm{supp}(u) \subset\subset \Omega$ (d.h. $\overline{\mathrm{supp}(u)}$ ist eine kompakte Teilmenge von Ω) und $\varepsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega)$, dann ist $\rho_\varepsilon * u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Hinweis für (a): Differenzenquotient, majorisierte Konvergenz.

Aufgabe 2 (25 Punkte): (*Soboleväume, schwache Ableitung*)

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle $p \in [1,\infty]$.

b) Es sei $R > 0$, $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ und $u : B_R(0) \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$, $\alpha > 1-n$. Für welche $p \geq 1$ ist $u \in W^{1,p}(B_R(0))$?

Aufgabe 3 (25 Punkte): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega), p \in [1,\infty)$ und $\nabla u = 0$. Zeigen Sie, dass dann $u = \mathrm{const.}$ fast überall in Ω.
Hinweis: Arbeiten Sie auf Bällen und verwenden Sie die Glättung (mollification) von u.

Aufgabe 4 (20 Punkte): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge mit $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ und $T_{\partial_{x_1} u_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ für $k \to \infty$, wobei $f \notin L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u \notin W^{1,p}(\Omega)$.
Erinnerung: Für eine Funktion $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist T_g die Distribution $T_g : \varphi \mapsto \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.