Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de
Qualitative Aspekte gewöhnlicher Differentialgleichungen — SoSe 2014

Blatt 6

wird besprochen: 28.5.2014

Problem 1: Bestimme $E^S(0), E^U(0), W^S(0)$ und $W^U(0)$ explicit (bis auf ein Integral von g) für

$$dx/dt = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2+g(x_1) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } g(0)=0 \text{ und } g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass $W^S(0)$ tangential zu $E^S(0)$ und $W^U(0)$ tangential zu $E^U(0)$ in $x=0$ sind.

Hinweis: Verwende die Transformation $u = e^{-s}$ in der Variation der Konstanten für $x_2(t)$.

Problem 2: Für

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -x_1 + x_2^2 \\ dx_2/dt &= x_2 - 2x_1^2 \end{aligned}$$

berechne eine Approximation der lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten $W^S_{loc}(0)$ und $W^U_{loc}(0)$ mit Hilfe ein Paar Fixpunkt-Iteration-Schritte wie im Beweis der Existenz von $W^S_{loc}(0)$ und $W^U_{loc}(0)$. Zeige (mit so wenig Iteration-Schritten wie möglich), dass für $x_1 \to 0$ die Mannigfaltigkeit $W^S_{loc}(0)$ durch

$$\{(x_1,x_2) : x_2 = \tfrac{2}{3}x_1^2 + O(|x_1|^5)\}$$

approximiert wird und $x_2 \to 0$ die Mannigfaltigkeit $W^U_{loc}(0)$ durch

$$\{(x_1,x_2) : x_1 = \tfrac{1}{3}x_2^2 + O(|x_2|^5)\}$$

approximiert wird.

Problem 3: (Rest vom Beweis zu Lemma 15 aus der Vorlesung) Mit der Notation aus der Vorlesung zeige, dass für

$$H(y) := V(t)y_0^S + \int_0^t V(t-s)G(y(s))ds - \int_t^\infty W(t-s)G(y(s))ds$$

gilt

$$H : D \to D, \quad \text{wobei } D = \left\{ y \in C([0,\infty)) : \sup_{t\geq 0} |y(t)| \leq 2Kr, |y(t)| \leq 2Ke^{-\alpha t}|y_0^S| \right\},$$

d.h. dass H eine Selbstabbildung auf D ist. Verwende die Abschätzungen von $|V(t)|, |W(t)|$ und $|G(y)|$ aus der Vorlesung.