Tomáš Dohnal
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 5

wird besprochen: 21.5.2014

Problem 1: Für folgende Systeme finde alle kritischen Punkte und, falls möglich, mit Hilfe der Linearisierung bestimme ihre Stabilität.

(a)

$$dx_1/dt = x_1 - x_1 x_2$$
$$dx_2/dt = x_2 - x_1^2$$

(b)

$$dx_1/dt = -x_1 + x_2(1 + x_1)$$
$$dx_2/dt = -x_1(1 + x_1)$$

Problem 2: Betrachte folgendes System in Polarkoordinaten (r, θ).

$$dr/dt = r - r^3$$
$$d\theta/dt = 1 - \cos(2\theta)$$

(a) Bestimme die Ruhelagen und wende die Linearisierungsmethode an um ihre Stabilität zu bestimmen.

(b) Zeichne das Phasendiagram in den kartesischen Koordinaten (x, y) mit $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Welche radialen Abschnitte sind invariant? Bestimme die ω-Limes-Mengen für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Modifiziere die Gleichung, so dass sie eine instabile Ruhelage besitzt, gegen die aber alle Lösungen für $t \to \infty$ konvergieren.

Problem 3: Für folgendes Systeme bestimme die Stabilität des kritischen Punktes $(0, 0)$.

$$dx_1/dt = x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_1$$
$$dx_2/dt = -x_1 + (x_1^2 + x_2^2)x_2$$

Hinweis: Falls Linearisierung keine Aussage liefert, betrachte die Gleichung für $r^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$.

Problem 4: Zeichne in der Ebene:

(a) Eine Trajektorie Γ mit $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = \{x\}, \Gamma \neq \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Eine Trajektorie Γ, so dass $\omega(\Gamma)$ ein periodischer Orbit ist.

(c) Eine Trajektorie Γ, so dass $\omega(\Gamma)$ aus einem Orbit und einem kritischen Punkt besteht.

Das Hinschreiben zugehöriger ODE-Systeme ist optional.

Problem 5: Beweise folgenden Satz

Theorem 0.1 *Sei $Re(\sigma(A)) < 0$ für ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass*

$$|e^{At}| \leq Ke^{-\sigma t} \qquad (|M| \text{ ist die Frobenius-Norm der Matrix } M)$$

für ein $K > 0, \sigma > 0$ und alle $t \geq 0$. Sei $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig auf $t \in [0, \infty)$. Falls ein $T > 0$ existiert, so dass

$$|B(t)| < \sigma/K \quad \text{für alle } t \geq T,$$

dann ist die Lösung $y \equiv 0$ von

$$dy/dt = (A + B(t))y$$

asymptotisch stabil.

Hinweise:
1) Anfangswertproblem mit dem Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Variation der Konstanten als Integralgleichung umschreiben.
2) Angenommen $\phi_T(y_0)$ ist beschränkt, wende Gronwall-Lemma an, um zu zeigen, dass $|\phi_t(y_0)| \leq K|\phi_T(y_0)|e^{-\alpha(t-T)}$ für alle $t \geq T$ und ein $\alpha > 0$.
3) Wieder mit Gronwall (auf $[0, T]$) zeige, dass für $\varepsilon > 0$ gegeben, Anfangsdaten y_0 klein genug gewählt werden können, so dass $|\phi_t(y_0)| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ bleibt.