Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 13

wird besprochen: 16.7.2014

Problem 1: Betrachte für den Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -y + \mu x, \\ y' &= x + \mu y. \end{aligned}$$

Zeige, dass der Fluss für $\mu = 0$ nicht topologisch äquivalent ist zum Fluss für $\mu \neq 0$.

Hinweis: Durch Widerspruch. Nutze das Limes $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$.

Problem 2: Betrachte die Duffing-Gleichung, die die Auslenkung eines Balkens der Länge 1 durch eine Kompressionskraft beschreibt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \delta \frac{du}{dt} - (\alpha - \pi^2)u + \beta u^3 = 0,$$

wobei $\delta > 0$ die viskose Dämpfung, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Kompressiionskraft (negativ bedeutet Streckung) und $\beta > 0$ die Steifigkeit modellieren.

Bestimme das Verzeigungsdiagram für kritische Punkte, wobei α der Verzweigungsparameter ist.

Problem 3: Für das System

$$\begin{aligned} x' &= xy, \\ y' &= \mu x - y - x^2 + y^2 \end{aligned}$$

untersuche die Stabilität aller kritischen Punkte mit $y = 0$. Zeichne diese in einem Verzweigungsdiagram.

Hinweis: In einem Fall ist die Reduktion auf die zentrale Mannigfaltigkeit nötig.

Problem 4: Zeige, dass jedes System $x' = f(x)$ mit $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f(0) = 0$ und

$$Df(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

geschrieben werden kann in folgender Normalform zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + O(|x|^3), \\ x_2' &= a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + O(|x|^3) \end{aligned}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Hinweis: Wähle den komplementären Raum $G_2 = span\{(0, x_1^2)^T, (0, x_1 x_2)^T\}$.