Institut für Analysis | Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund | tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de
Qualitative Aspekte gewöhnlicher Differentialgleichungen SoSe 2014

Blatt 1

wird besprochen: 16.4.2014

Problem 1: Betrachte das Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra-Modell)

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(a - by), \\ dy/dt &= y(-c + dx) \end{aligned} \tag{0.1}$$

mit $a, b, c, d > 0$, wobei $x(t)$ die Population von Insekten und $y(t)$ die Population von ihren Räuber sind. Modifiziere das Modell für den Fall, dass ein Insektengift eingeführt wird. Das Insektengift ist giftig für beide Insekten und die Räuber und tötet beide Populationen mit Raten, die proportionell zu ihren Populationsgrössen sind.

Finde den nichtrivialen kritischen Punkt und zeichne das Phasendiagramm. Nutze dabei den Fakt, dass alle Lösungen mit $x(0), y(0) > 0$ periodisch sind. Welche Auswirkung hat das Gift auf den Verlauf der Insektenpopulation?

Problem 2:

(a) Jetzt betrachten wir das Räuber-Beute-Modell (0.1) mit limitiertem Wachstum. In anderen Wörtern ersetzen wir das exponentielle Wachstum durch das (mehr realistische) logistische Wachstum. Dadurch erhält man das System

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(a - by - \lambda x), \\ dy/dt &= y(-c + dx - \mu y) \end{aligned} \tag{0.2}$$

mit $a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$.

Finde die kritischen Punkte von (0.2) und zeichne den Phasendiagram. Verwende dabei die Nullinien, d.h. die Kurven (hier Geraden), auf den $dx/dt = 0$ oder $dy/dt = 0$. Untersuche die zwei Fälle, wenn sich die Nulllinien ausserhalb des ersten Quadrants ($x, y > 0$) schneiden und wenn sie sich innerhalb schneiden. Warum kann man im letzteren Fall ohne weiterer Analysis das Phasendiagramm in der Nähe des krit. Punktes im ersten Quadrant nicht qualitativ bestimmen?

(b) Für beide Fälle in (a) wähle Beispielwerte von $a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$ und verwende das Matlab-Programm `pplane` aus `http://math.rice.edu/~dfield` für das Plotten des Richtungfeldes. Drucke das Richtungsfeld aus.

Hinweis: Um `pplane` zu nutzen muss man (zusätzlich zu Matlab) nichts installieren. Es reicht die Datei pplane∗.m herunterzuladen und "pplane∗" asuführen. Der Rest ist selbst erklärend.

Problem 3: Beweise, dass für $V \in C^1(\mathbb{R})$ und $e \in \text{Range}(V)$ ist die Niveaumenge

$$\{(x_1, x_2) : x_2^2/2 + V(x_1) = e\}$$

eine C^1-Kurve mit der Ausnahme kritischer Punkte, d.h. Punkte (x_1, x_2) mit $V'(x_1) = 0, x_2 = 0$.

Hinweis: Satz von der impliziten Funktion.