Mitschrift zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)
Prof. Dr. Tomáš Dohnal, WS 2019/20
Bearbeitung: Kai Helms, Tomáš Dohnal
10. März 2020

Anmerkungen, Fehler und Vorschläge bitte an kai.helms@web.de zur sofortigen Ausbesserung. Ich übernehme keine Haftung, jedoch gerne Verantwortung für alle Unstimmigkeiten, die vorkommen und bemerkt werden.

---

1. Einleitung

Die Hauptreferenz dieser Vorlesung ist [2]. Es werden aber auch andere Quellen benutzt, wie [3] oder [1].

"Differentialgleichungen sind Gleichungen mit Funktionen (Unbekannten) und ihren Ableitungen"

Beispiel.

1. $\frac{dx}{dt}(t) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$; Lösung: $x(t) = ce^t$
2. $\frac{dx}{dt}(t) = c \in \mathbb{R}$ für $t \in \mathbb{R}$; Lösung: $x(t) = ct + d$ für alle $d \in \mathbb{R}$

Definition. Seien $m, n \in \mathbb{R}, I$ ein Intervall und $F : I \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1) \text{ mal}} \to \mathbb{R}^n$

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, ..., \frac{d^mx}{dt^2}\right) = 0,\ t \in I \tag{1.1}$$

(kurz : $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(k)} = 0)$ heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung (ODE)* der Ordnung m.

Bemerkung.

- In (1.1) ist nur eine unabhängige Variable: t (oft ist t die Zeit).
- Bei partiellen Differentialgleichungen (PDE) gibt es mehrere unabhängige Variablen.

Beispiel.

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

Definition. $x : I \to \mathbb{R}^n$ heißt eine *Lösung* von (1.1) in I, falls $x \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ und

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(k)}(t)) = 0,\ t \in I$$

Anwendungen von ODEs finden sich “überall”, einige Beispiele sind:

- Biologie: Populationsmodelle
- Finanz: Verzinsung, Bewertung von Wertpapieren
- Chemie: Reaktionsgleichungen, radioaktiver Zerfall
- Mechanik: Planetenbahnen, Pendel, Oszillator
- Elektrotechnik: Schwingkreis

1.1. Erste Beispiele

1) Bevölkerungswachstum

   (a) Die Änderungsrate ist proportional zur aktuellen Populationsgröße.
   Modell:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t),\ t > 0 \text{ mit } \alpha > 0 \tag{1.2}$$

   Lösungen:

$$x(t) = ce^{\alpha t} \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

   Behauptung. Jede Lösung von (1.2) hat die Form $x(t) = ce^{\alpha t}$ mit $c \in \mathbb{R}$

   Beweis. Sei $x(t)$ eine Lösung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\alpha t}\right) &= \dot{x}(t)e^{-\alpha t} - \alpha x(t)e^{-\alpha t} \\ &= \underbrace{\left(\dot{x}(t) - \alpha x(t)\right)}_{=0} e^{-\alpha t} = 0 \\ \Rightarrow x(t)e^{\alpha t} &= c \in \mathbb{R},\ \text{d.h. } x(t) = ce^{\alpha t} \end{aligned}$$

   □

   Bemerkung. c kann durch die *Anfangsbedingungen* (AB) $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ ermittelt werden.

$$x(0) = ce^{\alpha \cdot 0} \stackrel{!}{=} x_0 \Rightarrow c = x_0$$

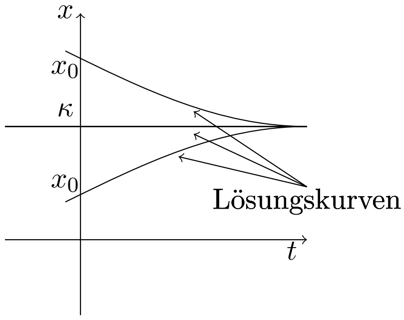
   Zusammenfassung. Das *Anfangswertproblem* (1.1) hat die eindeutige Lösung $x(t) = x_0e^{\alpha t}$.

   (b) Logistisches Wachstum - realistischer: kein unbegrenztes Wachstum (zum Beispiel durch endliche Ressourcen)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right),\ t > 0 \\ x(0) &= x_0 \\ &\text{mit } \alpha > 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

   - für $x \in (0, \kappa)$ ist $\dot{x} > 0$ (Wachstumsrate positiv)
   - für $x > \kappa$ ist $\dot{x} < 0$ (Rückgängig)

- für $x = \kappa$ ist $\dot{x} = 0$ (Equilibrium)



Lösung von (1.3):

$$x(t) = \frac{x_0 \kappa}{x_0 + e^{-\alpha t}(\kappa - x_0)} \qquad \text{(Separation der Variablen)}$$

2) Radioaktiver Zerfall
Annahme: Die Zerfallsrate ist proportional zur aktuellen Masse $x(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda x, t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \; x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \tag{1.4}$$

3) Harmonischer Oszillator
Annahme: Die einzige äußere Kraft ist die Gravitation
Kräfte:

- $$F_g = mg \qquad \text{(Gewichtskraft)}$$
- $$F_f(x) = -kx, \; k > 0 \qquad \text{(Federkraft)}$$
- in der Ruhelage $x = x_0$ ist $F_g = -F_f(x_0)$, d.h. $mg - kx_0 = 0$

Sei $y := x - x_0$

- 2. Newtonsches Gesetz:

$$\begin{aligned} \underbrace{m\ddot{x}}_{m\ddot{y}} &= \underbrace{F_g + F_f(x)}_{=mg-kx} \\ m\ddot{y} &= mg - kx_0 - k(x - x_0) = -ky \end{aligned} \tag{1.5}$$

Also

$$\ddot{y} = -\omega^2 y,$$

wobei

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

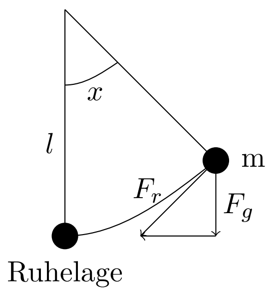
Lösung von (1.5) : $y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, a, b werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$y(0) = y_0, \; \dot{y}(0) = y_1, \; a = y_0, \; b = \frac{y_1}{\omega}$$

Eindeutige Lösung von AWP:

$$y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

4) Mathematisches Pendel



- Rückstellkraft:

$$F_r(x) = F_g \cdot \sin(x) = mg \cdot \sin(x)$$

- Newton:

  tangentiale Beschleunigung: $l\ddot{x}$

$$\Rightarrow ml\ddot{x} = -F_r(x) = -mg \cdot \sin(x) \tag{1.6}$$

  das heißt

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0, \ \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Die Lösung von (1.6) existiert also, ist aber im Allgemeinen nicht explizit.

- offenbare explizite Lösungen:

$$x \equiv n \cdot \pi, \ n \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, & \text{stabile Ruhelage} \\ n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, & \text{instabile Ruhelage} \end{cases}$$

5) Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \text{Beute-Population} \\ y(t) &= \text{Räuber-Population} \end{aligned}\right\} \text{zur Zeit } t$$

$$\text{Modell:} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax - byx \\ \dot{y} &= -cy + dyx \end{aligned}\right\} \text{mit } a, b, c, d > 0 \text{ gegeben}$$

ist im Allgemeinen nicht explizit lösbar

Definition. ODE (1.1) heißt *linear*, falls F linear von $x, \dot{x}, ..., x^{(k)}$ abhängt, sonst heißt sie *nicht-linear*.

Bemerkung. Die Beispiele (1) - (3) sind linear, Beispiele (4),(5) sind nicht-linear.

1.2. Fragestellungen der ODE-Theorie

(i) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

$$\text{von} \begin{cases} \text{ODE - in der Regel keine eindeutige Lösung} \\ \text{AWP - unter Bedingungen herrscht Eindeutigkeit} \end{cases}$$

(ii) Lokale oder globale Existenz

- lokal für $t \in (t_*, t^*)$

- global für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in (0, \in \infty)$
  $\Rightarrow$ Beispiel (1) a,b

Beispiel. ODE mit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2, \ t > 0 \\ x(0) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ gegeben} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = x^2$$

Dann ist

$$x^{-2}(t)\frac{dx}{dt} = 1 \text{ (falls } x(t) \neq 0).$$

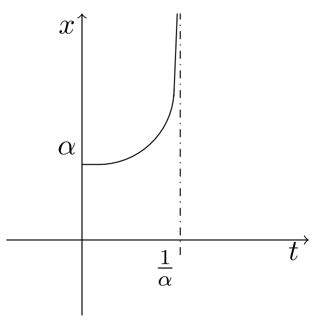
Mit Integration folgt

$$\begin{aligned} \int x^{-2}(t)\frac{dx}{dt} &= \int 1dt \\ \int x^2 dx &= t + c \\ -x^{-1} &= t + c \\ x(t) &= -\frac{1}{t+c} \\ x(0) = \alpha \ &\Rightarrow \ -\frac{1}{c} = \alpha \\ \Rightarrow \ c &= -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Also

$$x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{\alpha}}$$

$\Rightarrow$ Blow-Up in $t = \frac{1}{\alpha}$, also nur lokale Existenz der Lösung.



(iii) Abhängigkeit der Lösung von Daten (Anfangsdaten oder Parameter)

(iv) Techniken zur Berechnung von Lösungen

(v) Qualitatives Verhalten
(Beschränktheit, invariante Mengen, periodische Lösungen, Asymptotik für $t \to \infty$, Stabilität)

1.3. Inhalte der Vorlesung (vorläufig)

(I) Einleitung: Richtungsfeld, Phasenebene, Spezielle Gleichungen

(II) Existenz, Eindeutigkeit: Satz von Picard-Lindelöff, Maximales Existenzintervall

(III) Lineare Systeme: $\dot{x} = Ax + b,\ \ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \ b \in \mathbb{R}^n$

(IV) Abhängigkeit von Daten

(V) Stabilität

(VI) Existenzsatz von Peano

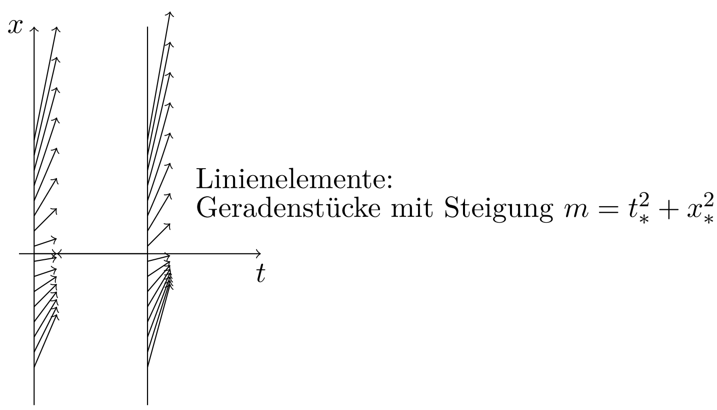
1.4. Richtungsfeld, Phasenportrait

(a) Skalare ODEs erster Ordnung:

$$\dot{x} = \underbrace{f(t,x)}_{\substack{\text{Steigung von} \\ \text{x(t) zur Zeit} t \\ \text{beim Wert x}}}\ , f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Beispiel.

$$\dot{x} = t^2 + x^2$$



Definition. Betrachte (1.6). Das Triple $(t, x, f(t,x)) \in \mathbb{R}^3$ heißt *Linienelement*. Die Gesamtheit aller Linienelemente von (1.6) heißt *Richtungsfeld*.

Definition. Kurven $t \mapsto x(t)$, gegeben durch $f(t,x) = c \in \mathbb{R}$, heißen *Isoklinen*. Eine Lösungskurve $t \mapsto x(t)$ für $\dot{x} = f(x,t),\ \ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Trajektorie* oder *Orbit*.

Bemerkung.

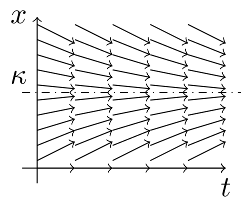
(a) Trajektionen folgen dem Richtungsfeld

(b) Isokline = Kurve des gleichen Anstiegs von x

(c) im autonomen Fall (f unabhängig von t, das heißt $f = f(x),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) sind die Linienelemente offenbar von t unabhängig

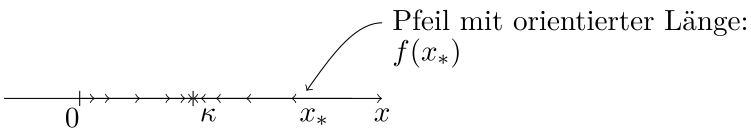
Beispiel. (Logistische Gleichung)

$$\dot{x} = x(1 - \tfrac{x}{\kappa}),\ \kappa > 0$$



Alternative Darstellung für skalare autonome ODEs:

Beispiel. (Logistische Gleichung)



(b) Autonome Systeme von zwei Gleichungen

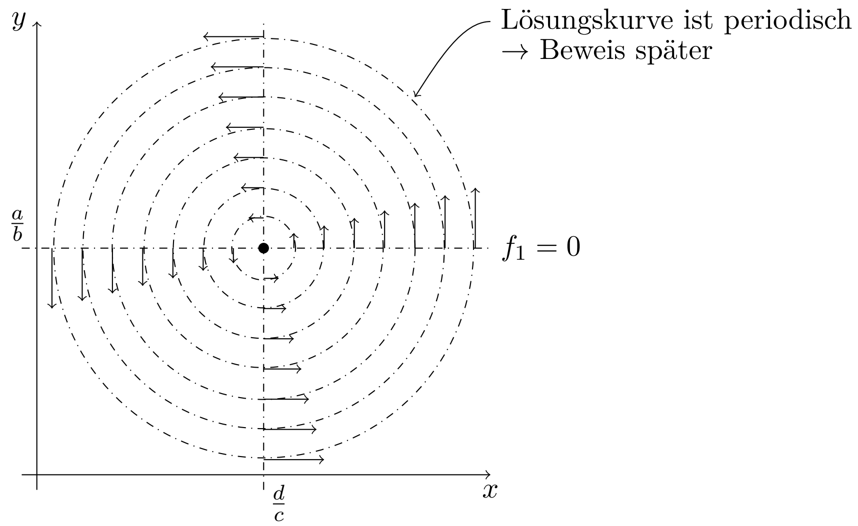
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y) \end{aligned}\right\} \text{ mit } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{1.7}$$

Definition. Für (1.7) heißt $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^4$ das *Linienelement* und deren Gesamtheit das *Richtungsfeld.*

Beispiel. (Lotka-Volterra)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (a - by)x \\ \dot{y}(t) &= (cx - d)y \end{aligned}\right\} \text{ mit } a, b, c, d > 0 \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \text{Beutepopulation} \\ y(t) &= \text{Räuberpopulation} \end{aligned}\right\} \text{ zur Zeit t.}$$



Definition. Betrachte ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x),\ \ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1.9}$$

a) Punkt $u_* \in \mathbb{R}^n$ heißt *Ruhepunkt* (kritischer Punkt, Equilibrium), falls $f(u_*) = 0$

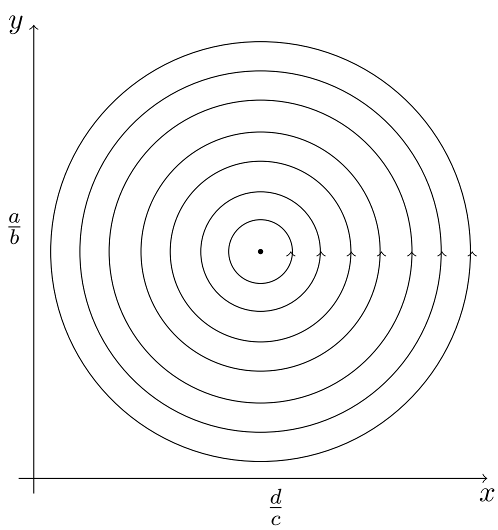
b) Für $n = 2$ heißt die Ebene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die *Phasenebene* und die Gesamtheit der Trajektionen das *Phasenportrait.*

Bemerkung. Ruhepunkte sind konstante Lösungen

Beispiel. In (1.8) gibt es zwei Ruhepunkte:

$$(0, 0), \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

Phasenportrait (Räuber-Beute-Modell)



Definition. Eine nicht konstante Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* von (1.9), falls Φ konstant entlang Lösungen ist. Das heißt, für jede Lösung $x(t)$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\Phi(x(t)) = c, \ \forall \ t \in \mathbb{R}$

Bemerkung. Trajektorien liegen in Niveaumengen des ersten Integrals.

- Die Niveaumenge zu $c \in \mathbb{R}$ ist $\Phi^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} : \ \Phi(x) = c\}$

Beispiel. Lotka-Volterra für $x, y > 0$

$$\Phi(x,y) = \frac{c}{a}x + \frac{b}{a}y - \frac{d}{a}\log\left(\frac{cx}{a}\right) - \log\left(\frac{by}{a}\right)$$

ist ein erstes Integral. (Herleitung: siehe [2])

- Kontrolle, dass Φ ein erstes Integral ist.
  Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(x(t),y(t)) &= 0 \text{ für jede Lösung } (x,y) \\ \frac{d}{dt}\Phi(x(t),y(t)) &= \partial_x\Phi\dot{x} + \partial_y\Phi\dot{y} \\ &= \partial_x\Phi(x(t),y(t))\dot{x}(t) + \partial_y\Phi(x(t),y(t))\dot{y}(t))\end{aligned}$$

Es gilt:

$$= \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \frac{c}{a}\left(1 - \frac{d}{a}\frac{a}{cx}\right) \\ \frac{b}{a}\left(1 - \frac{a}{by}\right) \end{pmatrix}.$$

Also

$$\frac{d}{dt}\Phi(x(t),y(t)) = \left(\frac{c}{a} - \frac{d}{a}\frac{1}{x}\right)\underbrace{(a-by)x}_{=\dot{x}} + \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{y}\right)\underbrace{(cx-d)y}_{=\dot{y}} = 0.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\nabla\Phi = 0 &\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) \\ D^2\Phi &= \begin{pmatrix} \frac{d}{a}\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit} \\ &\Rightarrow \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) \text{ ist globales Minimum von } \Phi : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

Niveaumengen sind geschlossene Jordan-Kurven

- Lösungen existieren global (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$) $\to$ siehe Kapitel II
- Also folgt, dass alle Lösungen mit $(x(0),y(0)) \in (0,\infty)^2$ periodisch sind, d.h.
  $$\forall \ (x(0),y(0)) \in (0,\infty)^2 \ \exists \ \tau > 0 : \ (x,y)(t+\tau) = (x,y)(t), \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

Beispiel. (Mathematisches Pendel)

$$\ddot{x} + \omega^2\sin(x) = 0$$

Transformation zum System erster Ordnung:

$$u := x,\ v := \dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} + \omega^2 \sin(u) = 0 \\ \dot{u} = v \end{cases} \tag{1.10}$$

suche $\Phi(u, v)$, sodass $\partial_u \Phi(u, v)\dot{u} + \partial_v \Phi(u, v)\dot{v} = 0$, das heißt $\partial_u \Phi v - \partial_v \Phi \omega^2 \sin(u) = 0$

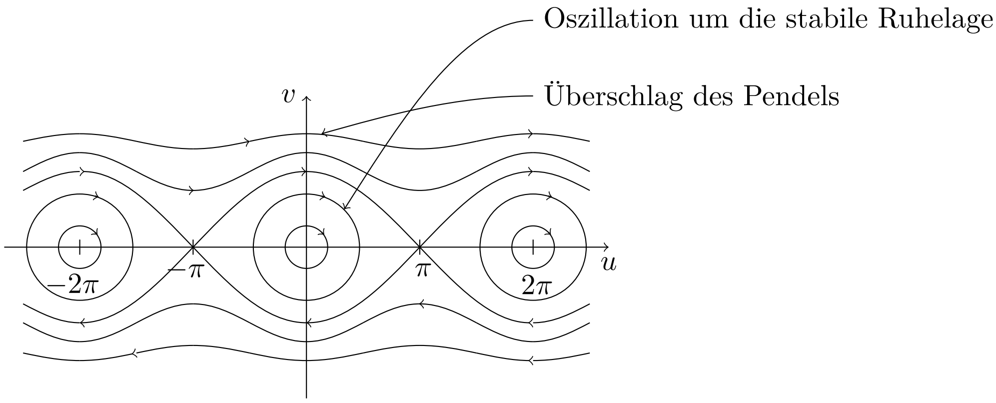
- einfachstes Φ: $\Phi(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos(u)$
- übliche Wahl: $\Phi(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos(u)) \ \Rightarrow\ $ sodass $\Phi \geq 0$
- Ruhepunkte: $(k\pi, 0),\ k \in \mathbb{Z}$

$$\nabla\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \omega^2 \sin(u) \\ v \end{pmatrix},\ D^2\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $u = 2n\pi \Rightarrow\ D^2\Phi(u, v)$ ist positiv definit, da $(2\pi n, 0)$ ein lokales Minimum von Φ ist (untere Ruhelage)
- $u = ((2n + 1)\pi) \Rightarrow\ D^2\Phi(u, v)$ ist indefinit

$$\Rightarrow\ ((2n + 1)\pi, 0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Phasenportrait (Mathematisches Pendel)



1.5. Wichtige ODE-Typen & Lösungsverfahren

Allgemeine Form:

$$F(t, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(k)}) = 0,\ F : I \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

1)

$$\begin{cases} \text{Skalare ODE: } n = 1 \\ \text{ODE-Systeme: } n > 1 \end{cases}$$

Bemerkung. Eine ODE m-ter Ordnung kann immer als ein größeres System erster Ordnung ungeschrieben werden.

$$y_1 := x,\ y_2 := \dot{x},\ y_m := x^{(m-1)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ ... \\ \dot{y}_{(m-1)} = y_m \\ F(t, y_1, y_2, ..., y_m, \dot{y}_m) = 0 \end{cases}$$

2) Homogene ODE
   In (*) ist kein Term der Form $h(t)$, z.B. $\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0$
   inhomogene ODE: z.B. $\dot{x} = x + t$

3) Lineare ODE
   Eine wichtige Klasse ist $\dot{y} = My + f(t),\ M \in \mathbb{R}^{n\times n},\ f : \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}^n$
   nichtlineare ODE: oft nicht explizit lösbar

4) Autonome ODE
   $F = F(x, \dot{x}, ..., x^{(m)})$, d.h. F hängt nicht direkt von t ab $\to$ hier sind Richtungsfeld & Phasenportrait sinnvoll

5) separable ODEs (ODE mit getrennten Variablen) $\dot{x}(t) = g(x)h(t),\ g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6) exakte ODE
   $\partial_x F(x, y) + \partial_y F(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$

7) Bernoulli-ODE
   $\dot{x} + g(t)x + h(t)x^\alpha = 0,\ \alpha \neq 1\ \Rightarrow$ lässt sich als lineare ODE umschreiben

8) Riccati-ODE
   $\dot{x} + g(t) + h(t)x^2 = k(t)$

Bemerkung. Für 3 - linear, 5,6,7,8 gibt es spezielle Lösungsverfahren

(3a) Lineare homogene ODEs

$$\sum_{j=0}^{m} a_j(t)x^{(j)}(t) = 0,\ t \in I \subset \mathbb{R}$$

mit $a_j : I \to \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in I \to\ \mathbb{R}^n$
Hier gilt die Superposition: "für zwei Lösungen x, y ist auch $\alpha x + \beta y$ eine Lösung"(für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig).

(3b) Skalare lineare ODEs der Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),\ t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1.11}$$

(i) Homogenes Problem

$$\dot{x}_h = a(t)x_h,\ t \in I \tag{hom}$$

$$x_h(t) = ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \text{ mit } t_0 \in I \text{ beliebig} \tag{1.12}$$

Behauptung. Jede Lösung von (hom) hat die Form (1.12).

Beweis.
Sei x_h eine Lösung von (hom) und sei

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

für ein $t_0 \in I$ fest.

$$\frac{d}{dt}\left(x_h(t)e^{-A(t)}\right) = \left(\dot{x}_h - a(t)x_h(t)\right)e^{-A(t)} = 0,$$

da x_h eine Lösung ist.

$$\Rightarrow\ x_h(t)e^{-A(t)} = \tilde{c}$$

□

(ii) Inhomogenes Problem (1.11)

- suche eine ("partikuläre") Lösung x_p

- Ansatz:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= c(t)e^{A(t)} && \text{(Variation der Konstanten)} \\ \dot{x}_p(t) &= (\dot{c}(t)t + c(t)a(t))e^{A(t)} \\ &= a(t)x_p(t) + b(t) \\ &= a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \Rightarrow \quad \dot{c}(t) &= e^{-A(t)}b(t) \end{aligned}$$

Eine Lösung ist

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\ ds,$$

also ist

$$x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds$$

auch eine Lösung von (1.11).

Satz 1.1 Sei $t_0 \in I$ beliebig. Jede Lösung von (1.11) hat die Form

$$x(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds. \tag{1.12}$$

Das heißt, sie ist Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis. Sei y eine Lösung von (1.11) und sei x wie in (1.12).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y-x) &= a(t)(y-x) + b(t) - b(t) \\ &\Rightarrow \quad (y-x) \text{ ist eine homogene Lösung} \\ &\Rightarrow \quad (y-x) = \tilde{c}e^{A(t)},\ c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y \text{ hat die Form (1.12)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

- Beim Anfangswertproblem wählt man oft t_0 = Zeit der AB
- c wird durch die AB bestimmt.

Beispiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\cos(t)}_{a(t)} x + t, \ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t \cos(s) ds \\ &= \sin(t) \ \Rightarrow \ x(t) = ce^{\sin(t)} + e^{\sin(t)} \int_0^t e^{-\sin(s)} s \ ds \\ x(0) &= 1 \ \Rightarrow \ c = 1 \\ &\Rightarrow \ x(t) = e^{\sin(t)} \left(1 + \int_0^t s e^{-\sin(s)} ds\right) \end{aligned}$$

(3c) Lineare Systeme der Form:

$$\dot{x} = Mx + f(t) \text{ mit } M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ f : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ Siehe Kap. III

(5) : separable ODEs

$$\dot{x} = g(x)h(t)$$

Beispiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + 1)t^2, \ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} \frac{dx}{dt} &= t^2 \\ \Rightarrow \ \int \frac{1}{x^2+1} \frac{dx}{dt} dt &= \int t^2 dt \qquad \text{(Substitution von } x(t)\text{)} \\ \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \int t^2 dt \\ \Rightarrow \ \arctan(x) &= \frac{t^3}{3} + c \\ \Rightarrow \ x(t) &= \tan\left(\frac{t^3}{3} + c\right) \end{aligned}$$

mit AB:

$$\begin{aligned} &x(0) = \tan(c) = x_0, \\ &\Rightarrow c = \arctan(x_0) \end{aligned}$$

und somit

$$x(t) = \tan\left(\frac{t^3}{3} + \arctan(x_0)\right)$$

Satz 1.2 Sei $h \in C(\alpha, \beta), \mathbb{R}),\ g \in C(a, b), \mathbb{R}),\ t_0 \in (\alpha, \beta),\ x_0 \in (a, b)$ und betrachte

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= g(x)h(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

(a) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann gibt es $\delta > 0$, sodass

$$x(t) := G^{-1}(H(t)) \tag{1.14}$$

die eindeutige Lösung von (1.13) ist auf $J_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, wobei

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)} ds$$

und

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s) ds.$$

(b) Falls $g(x_0) = 0$, dann ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung auf (α, β), aber andere Lösungen können existieren.

Beweis.

(a) $g(x_0) \neq 0$

(i) Eindeutigkeit: Sei $x(t)$ eine Lösung von (1.13).

- g und x sind stetig

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g \circ x \text{ stetig } \Rightarrow\ \exists \delta > 0 : g(x(t)) \neq 0,\ \forall t \in J_\delta \\ &\overset{(1.13)}{\Rightarrow} \frac{\dot{x}}{g(x(t))} = h(t),\ \forall t \in J_\delta \end{aligned}$$

- Linke Seite:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{g(x(t))} &= \frac{d}{dt} G(x(t)) && \text{(Kettenregel)} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} G(x(t)) &= h(t) \\ G(x(t) - \underbrace{G(x(t_0))}_{=0} &= \underbrace{\int_{t_0}^{t} h(s) ds}_{H(t)} && \text{(Integration)} \\ \Rightarrow\ G(x(t)) &= H(t)\ \forall t \in J_\delta \end{aligned}$$

- $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ G'(x(t)) = \frac{1}{g(x(t))} \neq 0\ \forall t \in J_\delta \\ &\Rightarrow\ \exists \text{ Umkehrfunktion } G^{-1} \\ &\Rightarrow\ x(t) = G^{-1}(H(t))\ \forall t \in J_\delta \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: (1.14) ist eine Lösung

- g, h sind stetig, $g(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \varepsilon > 0 : G \in C^1(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ H \in C^1(\alpha, \beta) \end{cases}$$

- $G'(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} \neq 0$

Also ist nach dem Umkehrsatz

$$G^{-1}(H) \in C^1(J_\delta) \text{ für ein } \delta > 0$$

Nun sei $x(t)$ gegeben durch (1.14):

$$\begin{aligned} x(t) &= G^{-1}(H(t)) \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} H'(t) \\ &= g(G^{-1}(H(t)))h(t) \\ &= g(x(t))h(t) \\ x(t_0) &= G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0 \end{aligned}$$

(b) $g(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \; x(t) \equiv x_0 \text{ ist offensichtlich eine Lösung.}$$

Es genügt, ein Beispiel ohne eine eindeutige Lösung zu finden.
Wir wählen:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x}, \; t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} &= 1 \,\Big|\int dt \\ \Rightarrow \int x^{-\frac{1}{2}} dx &= t + c \\ 2\sqrt{x} &= t + c \\ \Leftrightarrow \; x &= \frac{1}{4}(t+c)^2 \\ x(0) &= \frac{1}{4}c^2 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; c = 0 \\ \Rightarrow \; x(t) &= \frac{1}{4}t^2 \end{aligned}$$

ist eine Lösung

□

(6) exakte ODEs haben die Form

$$\partial_x F(x,y) + \partial_y F(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \; (= \frac{d}{dx}\left(F(x, y(x))\right)$$

Betrachte

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \; x \in I \subset \mathbb{R} \tag{1.15}$$

Definition. Falls $\exists\; F \in C^1(\mathbb{R}^2) : \partial_x F = g, \; \partial_y F = h$, dann ist (1.15) äquivalent zu $\frac{d}{dx}F(x, y(t)) = 0$ und die ODE (1.15) heißt *exakt*.

Bemerkung. Lösungen von (1.15) sind dann implizit durch $F(x, y(t)) = c$ gegeben.

Beispiel.

$$\underbrace{2x + y^2}_{g(x,y)} + \underbrace{2xy}_{h(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.16.1}$$

- suche $F(x, y)$, sodass $\partial_x F = 2x + y^2,\ \partial_y F = 2xy$
- eine Möglichkeit: $F(x, y) = xy^2 + x^2$
- Lösungen sind gegeben durch $xy^2 + x^2 = c$

Hier kann y explizit berechnet werden:

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm \left(\frac{c - x^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in (-\infty, \sqrt{c}] \cup (0, \sqrt{c}] \\ y(0) &= 0 \text{ nach (1.16.1)} \end{aligned}$$

Nur $c = 0$ erlaubt die Definition der Lösung in $x = 0$.

Satz 1.3 Seien $g, h \in C^1((\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta), \mathbb{R})$ und sei $\partial_y g = \partial_x h$ auf $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) =: \Omega$. Dann ist (1.15) exakt und ein zugehöriges F ist

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(\mu, y) d\mu + \int_{y_0}^{y} \left(h(x, \gamma) - \int_{x_0}^{x} (\partial_y g(\mu, \gamma) d\mu \right) d\gamma \tag{1.16.2}$$

mit $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig.

Beweis. F muss

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \ \partial_x F = g \\ \text{(ii)} \ \partial_y F = h \end{cases}$$

erfüllen. Aus (i) folgt:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(\mu, y) d\mu + \phi(y) \text{ mit } \phi \in C^1(\gamma, \delta) \text{ beliebig.}$$

Zu zeigen: $\exists\ \phi$ so, dass $\partial_y F = h$

$$\begin{aligned} \partial_y F(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \partial_y g(\mu, y) d\mu + \phi'(y) \\ &\overset{!}{=} h(x, y) \\ \Rightarrow \quad \phi'(y) &= h(x, y) - \int_{x_0}^{x} \partial_y g(\mu, y) \delta\mu \end{aligned} \tag{1.16.3}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von x, da

$$\partial_x \text{ (rechte Seite) } = \partial_x h - \partial_y g = 0 \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

$$\Rightarrow \text{ (1.16.3) ist lösbar für ein } \phi = \phi(y) = \int_{y_0}^{y} \left(h(x, \gamma) - \int_{x_0}^{x} \partial_y g(\mu, \gamma) d\mu \right) d\gamma$$

□

2. Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Kapitel betrachten wir das System (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0 \\ \text{mit } f: G \to \mathbb{R}^n,\ G &\subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen},\ (t_0,x_0) \in G \end{aligned} \tag{2.1}$$

Frage:

(a) Unter welchen Voraussetzungen an f existiert eine Lösung?

(b) Unter welchen Voraussetzungen an f existiert eine eindeutige Lösung?

Definition. $f : G \to \mathbb{R}^n$ heißt *lokal lipschitzstetig* bezüglich x, falls

$$\forall\ (t_1,x_1) \in G\ \exists\ r_1,\ \alpha,\ L > 0 : [t_1-\alpha, t_1+\alpha] \times \overline{B_r(x_1)} \subset G$$

und

$$|f(t,x) - f(t,\overline{x})| \leq L|x-\overline{x}|, \text{ falls } |t-t_1| < \alpha,\ x,\ \overline{x} \in \overline{B_r(x_1)}.$$

f heißt *global lipschitzstetig*, falls L unabhängig von $(t_1,x_1) \in G$ ist, das heißt

$$|f(t,x) - f(t,\overline{x})| \leq L|x-\overline{x}|,\ \forall\ (t,x),(t,\overline{x}) \in G.$$

Beispiel.

1) $g(x) = \sin(x)$ ist global lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$, da

$$|\sin(x) - \sin(\overline{x})| \leq \sup_{y\in[x,\overline{x}]} |\sin'(y)||x-\overline{x}| \leq |x-\overline{x}|$$

2) $g(x) = x^2$ ist lokal lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$, da

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x+\overline{x}||x-\overline{x}|$$

und $|x+\overline{x}| \to \infty$ für $x, \overline{x} \to \infty$.
Aber für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ existieren $r, L > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |x^2 - \overline{x}^2| &\leq L|x-\overline{x}|,\ \forall\ x,\overline{x} \in B_r(x_1) \\ L := 2 \cdot \max_{x\in\overline{B_r(x_1}} |x| &= 2(|x_1|+r) \end{aligned}$$

3) $g(x) = \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0,\infty)$ aber nicht lokal lipschitzstetig (Übung)

Lemma 2.1 Sei $f : G \to \mathbb{R}$ stetig und lokal lipschitzstetig bezüglich x und sei $K \subset G$ kompakt. Dann ist $f|_K$ global lipschitzstetig.

Beweis. Angenommen, $f|_K$ ist *nicht* global lipschitzstetig.

•

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists (t_n,x_n),(t_n,\overline{x}_n) \in K :\ |f(t_n,x_n) - f(t_n,\overline{x}_n)| > n|x_n - \overline{x}_n| \tag{2.1.1}$$

- K ist kompakt $\Rightarrow$ es existieren konvergente Teilfolgen

$$(t_{n_k}, x_{n_k}) \to (t_*, x_*) \in K$$

$$(t_{n_k}, \overline{x}_{n_k}) \to (t_*, \overline{x}_*) \in K$$

- f ist stetig $\Rightarrow$ $M := \max\limits_{(t,x)\in K} |f(t,x)| < \infty$

- Aus (2.1.1) folgt:

$$|x_{n_k} - \overline{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k}|f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \overline{x}_{n_k})| \leq \frac{2^M}{n_k} \to 0 \text{ für } (n_k \to \infty) \Rightarrow x_* = \overline{x}_*$$

- f ist lokal lipschitzstetig $\Rightarrow$ $\exists\ \alpha_*, r_*, L > 0:$

$$|f(t,x) - f(t,\overline{x})| \leq L|x - \overline{x}| \tag{2.1.2}$$

falls

$$|t - t_*| \leq \alpha_*,\ x, \overline{x} \in \overline{B_{r_*}(x_*)}$$

- $$\begin{aligned} \exists\ k_0 \in \mathbb{N}:\ |t_{n_k} - t_*| \leq \alpha_*,\ |x_{n_k} - x_*| + |\overline{x}_{n_k} - x_*| \leq r_*, \forall\ k \geq k_0 \\ \overset{(2.1.1),(2.1.2)}{\Rightarrow}\ n_k|x_{n_k} - \overline{x}_{n_k}| < |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \overline{x}_{n_k})| \\ \leq L|x_{n_k} - \overline{x}_{n_k}|,\ \forall\ k \geq k_0 \end{aligned}$$

  Widerspruch zu $n_k \to \infty$!

$\square$

Lemma 2.2 Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $f(t,\cdot)$ stetig differenzierbar. Dann ist f lokal lipschitzstetig.

Beweis.

- Sei $(t_1, x_1) \in G$ und G offen.

$$\Rightarrow\ \exists\ \alpha,\ r > 0:\ K := [t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \overline{B_r(x_1)} \subset G$$

- für alle $(t,x), (t,\overline{x}) \in K$gilt:

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\overline{x})| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(t, \tilde{c}x + (1-\tilde{c})\overline{x}) d\tau\right| \text{ (Hauptsatz)} \\ &= \left|\int_0^1 (x - \overline{x})^T D_x f(\cdots) d\tau\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|x - \overline{x})^T D_x f(\cdots)\right| d\tau \\ &\leq \int_0^1 |x - \overline{x}|\ \underbrace{||D_x f(\cdots)||}_{\substack{\text{Matrixnorm} \\ (||M|| = \sup\limits_{|x|=1} |Mx|)}}\ d\tau \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)} \\ &\leq \underbrace{|x - \overline{x}| \max_{(t,x)\in K} ||D_x f(t,x)||}_{=:L} \text{ und } < \infty,\ \text{da } D_x f \in C(K, \mathbb{R}^{n\times n}) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.3 Für $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ist $x(t)$ eine Lösung von (2.1) auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ genau dann, wenn $x \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,\ t \in [t_0, t_1] \tag{2.16}$$

erfüllt.

Beweis.

1) Gelte (2.1) auf $[t_0, t_1]$. Integriere (2.1):

$$\int_{t_0}^{t} \Rightarrow\ x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

2) Gelte (2.16).
   - $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ ist stetig differenzierbar in $[t_0, t_1]$, da f und x stetig sind, nach Lemma 2.2
$$x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n),\ \dot{x}(t) = f(t)x(t)$$
     Also
$$x(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))ds}_{=0} = x_0$$

$\square$

Satz 2.4 Für $f \in C\left(G, \mathbb{R}^n\right)$ lokal lipschitzstetig in x existiert höchstens eine Lösung von (2.1).

Beweis. Seien $x, \overline{x} \in C^1\left([t_0, t_1], \mathbb{R}^n\right)$ Lösungen.

- Es gilt:
$$(t, x(t)), (t, x(t)) \in G,\ \forall\ t \in [t_0, t_1]$$
- $K := \{(t, x(t)), (t, \overline{x}(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ ist kompakt (da $x, \overline{x}$ stetig ist)
- $f|_K$ ist global lipschitzstetig. Sei L die Lipschitzkonstante auf K.

- Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\
\overline{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{x}(s))ds \\
\Rightarrow \; x(t) - \overline{x}(t) &= \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, \overline{x}(s))ds \\
\rho(t) := |x(t) - \overline{x}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \overline{x}(s))|ds \leq L \int_{t_0}^{t} \rho(s)ds \\
\Rightarrow \rho(t) &\leq L \int_{t_0}^{t} \underbrace{e^{-\alpha s}\rho(s)} e^{\alpha s} ds \; \forall \; \alpha > 0 \\
&\leq L \sup_{s\in[t_0,t_1]} e^{-\alpha s}\rho(s) \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s} ds \\
&= \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}}{\alpha} \sup_{s\in[t_0,t_1]} e^{-\alpha s}\rho(s) \\
&\leq \frac{Le^{\alpha t}}{\alpha} \sup_{s\in[t_0,t_1]} e^{-\alpha s}\rho(s) \\
\Rightarrow \; e^{-\alpha t}\rho(t) &\leq \frac{L}{\alpha} \sup_{s} e^{-\alpha s}\rho(s) \; \forall \; t \in [t_0, t_1]
\end{aligned}
$$

wähle $\alpha = 2L$, nehme $\sup\limits_{t\in[t_0,t_1]}$:

$$
\begin{aligned}
\sup_{t} \; e^{-\alpha t}\rho(t) &\leq \frac{1}{2} \sup_{t} \; e^{-\alpha t}\rho(t) \\
\Rightarrow \; \sup \; e^{-\alpha t}\rho(t) &= 0 \Rightarrow \; \rho \equiv 0 \\
&\Rightarrow \; x \equiv \overline{x}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung. Eindeutigkeit gilt auch links von t_0, denn $x(t)$ löst (2.1) auf $[t_1, t_0]$ genau dann, wenn $y(t) := x(t_0 - t)$ die Gleichung $\dot{y}(t) = -f(t_0 - t, y(t))$ auf $[0, t_0 - t_1]$ löst. Offenbar ist g lipschitzstetig in y.

Beispiel.

$$
\dot{x} = \underbrace{\sqrt{x}}_{=:f(x)}, \; x(0) = x_0
$$

- $f(x) = \sqrt{x}$ ist in keiner Umgebung von $x = 0$ lokal lipschitzstetig.
- Tatsächlich gilt die Eindeutigkeit hier nicht, denn es gibt zwei Lösungen:

$$
\begin{aligned}
x(t) &\equiv 0 \\
x(t) &= \frac{1}{4}t^2
\end{aligned}
$$

Lemma 2.5 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Kontraktion, das heißt

$$
\exists \; q \in (0, 1) : d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y) \; \forall \; x, y \in M.
$$

Dann

$$
\exists! \; x_* \in M : T(x_*) = x_*.
$$

Beweis. Siehe Analysis 2. □

Satz 2.6 (Picard-Lindelöff) Betrachte (2.1) mit $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ lokal lipschitzstetig in x. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein eindeutiges $x \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, wobei $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $x(t)$ die Gleichung (2.1) auf I_δ löst (insbesondere gilt $(t, x(t)) \in G,\ \forall\ t \in I_\delta$).

Beweis.

1) Existenz auf $[t_0, t_0 + \delta]$ durch ein Fixpunkt-Argument.
   - (2.1) $\Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$
   - Sei $r, \delta_0 > 0$, sodass $I_{\delta_0} \times \overline{B_r(x_0)} \subset G$ (das ist möglich, da G eine offene Menge ist). Wahl von T:

$$T(x)(t) := \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + x_0$$
$$M_\delta := \{x \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) : x(I_\delta) \subset \overline{B_r(x_0)}, x(t_0) = x_0\}$$

   für $\delta \in (0, \delta_0)$

   (i) z.z.: $T : M_{\delta_1} \to M_{\delta_1}$ für ein passendes $\delta_1 > 0$ (Selbstabbildung)

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))|ds \\ &\leq m\delta_1 \text{ mit } m = \max_{\substack{t \in I_{\delta_0} \\ x \in \overline{B_r(x_0)}}} |f(t, x)| \end{aligned}$$

   Für $\delta_1 := \min\{\delta_0, \frac{r}{m}\}$ folgt $T(x)(t) \in \overline{B_r(x_0)}\ \forall\ t \in I_{\delta_1}$, das heißt $T : M_{\delta_1} \to M_{\delta_1}$

   (ii) zu zeigen: T ist eine Kontraktion
   - Sei $\delta \leq \delta_1$. Wir wählen die Metrik $d(x, \overline{x}) = \max\limits_{t \in I_\delta} e^{-\kappa t}|x(t) - \overline{x}(t)|$ mit $\kappa > 0$ passend zu wählen.
   - Sei $t \in I_\delta,\ x, \overline{x} \in M_{\delta_0}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(\overline{x}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \overline{x}(s))|ds \\ &\overset{lip.}{\leq} L \int_{t_0}^t |x(s) - \overline{x}(s)|ds \\ &= L \int_{t_0}^t \underbrace{e^{-\kappa s}|x(s) - \overline{x}(s)|}_{\leq d(x, \overline{x})} e^{\kappa s} ds \\ &\leq L d(x, \overline{x}) \int_{t_0}^t e^{\kappa s} ds \\ &\leq \frac{L}{\kappa} d(x, \overline{x}) e^{\kappa t}\ \forall\ t \in I_\delta \end{aligned}$$

   Multipliziere mit $e^{-\kappa t}, \max\limits_{t \in I_\delta}$:

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{L}{\kappa} d(x, \overline{x})$$

wähle zum Beispiel $k = 2L$, dann $d(T(x), T(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, \overline{x}),\ \forall\ x, \overline{x} \in M_\delta \Rightarrow T$ ist eine Kontraktion auf $M_\delta \Rightarrow$ Es existiert genau ein Fixpunkt $x_* \in M_\delta$, das heißt

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s))ds\ \forall\ t \in I_\delta$$

2) Existenz von Lösungen u_* zu $[t_0 - \delta_2, t_0]$ für $\delta > 0 \Rightarrow$ durch Anwendung von Schritt 1) auf $x(t) := u(-t)$

3) Lösung auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ für $\delta > 0$
Sei

$$x(t) := \begin{cases} x_*(-t), t \in [t_0, t_0 + \underbrace{\min\{\delta_1, \delta_2\}}_{=:\delta}] \\ \\ u_*(t), t \in [t_0 - \delta, t_0] \end{cases}$$

x ist offenbar stetig auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und C^1 auf $[t_0 - \delta, t_0]$ und $[t_0, t_0 + \delta]$. x ist auch stetig diffbar in t_0, weil

$$\lim_{t \to t_{0-}} \dot{x}(t) = \lim_{t \to t_{0-}} f(t, x(t)) = \lim_{t \to t_{0+}} f(t, x(t)) = \lim_{t \to t_{0+}} \dot{x}(t)$$

4) Eindeutigkeit: Satz 2.4

□

Bemerkung. Die Lösung aus Satz 2.6 heißt *lokale Lösung*, da sie im Allgemeinen nur auf einer Umgebung von t_0 existiert

Korollar 2.7 (Lineare Systeme) Sei $J = [a, b], t_0 \in (a, b), x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $b \in C(J, \mathbb{R}^n), A \in C(J, \mathbb{R}^{n \times n})$. Dann hat $\dot{x} = A(t)x + b(t), x(0) = x_0$, genau eine lokale Lösung.

Beweis. Sei $f(t, x) := A(t)x + b(t)$

- offenbar ist $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
- $|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y) = ||A(t)|||x - y| \leq L|x - y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n, t \in J$, wobei $L := \max\limits_{b \in J} ||A(t)|| \overset{S.2.6}{\Rightarrow}$ Es gibt also eine eindeutige lokale Lösung.

□

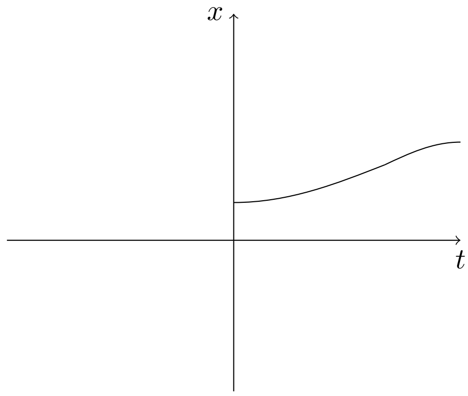
Frage. Satz 2.6 liefert die Existenz einer Lösung auf einem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Kann das Intervall erweitert werden?

Bemerkung. Falls x_1 Lösung von (2.1) auf $[t_0, t_1]$ und x_2 Lösung von (2.1) auf $[t_1, t_2]$ mit $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ ist, dann ist

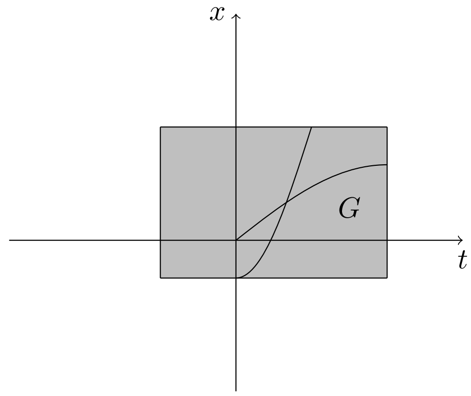
$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [t_0, t_1] \\ x_2(t), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_0, t_2]$. (Das ist das gleiche Argument wie in Schritt (3) im Beweis von Satz 2.6.)

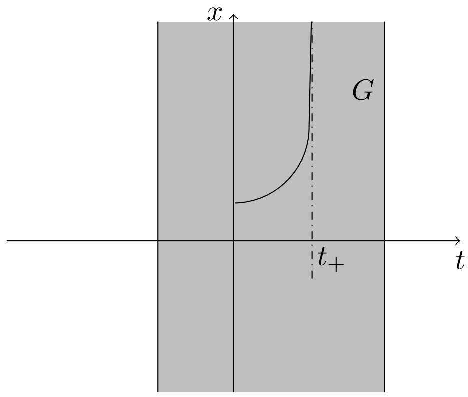
(1)



(2)



(3)



Definition. Sei
$t_+ := t_+(t_0, x_0) := \sup\{t_+ \geq t_0 :$ Es gibt eine Lösung x_1 von (2.1) auf $[t_0, t_1\}]$ und $t_- := t_-(t_0, x_0) := \inf\{t_- \leq t_0 :$ Es gibt eine Lösung x_2 von (2.1) auf $[t_2, t_0\}]$

- $\left.\begin{array}{l}[t_0, t_+) \\ (t_-, t_0]\end{array}\right\}$ heißen die *maximalen Existenzintervalle* nach rechts, bzw. links.
- Die *maximale Lösung* von (2.1) ist $x(t) := \begin{cases} x_1(t), t \in [t_0, t_1], t_1 < t_+ \\ x_2(t), t \in [t_2, t_0], t_- < t_2 \end{cases}$

Bemerkung. Die maximale Lösung lässt sich also nicht mehr fortsetzen.

Satz 2.8 Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ lokal lipschitzstetig in x. Die Lösung von (2.1) existiert auf dem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) mit $t_- = t_-(t_0, x_0) < t_0, t_+ = t_+(t_0, x_0) > t_0$. Für t_+ gilt genau eine der Alternativen:

1) $t_+ = \infty$,

2) $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \to t+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$ (Lsg kommt dem Rand ∂G beliebig nahe),

3) $t_+ < \infty, \liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$ und $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$ (Blow-Up).

Bemerkung. Der letzte Fall kann auch dann auftreten, wenn $\partial G = \emptyset$ (z.B. wenn $G = \mathbb{R}^{n+1}$), weil dann $\operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) = \inf_{y \in \emptyset} |(t, x(t)) - y| = \infty$, da $\inf \emptyset = \infty$.

Bemerkung. Fall (3) ist nur möglich, falls G in einer x-Richtung unbeschränkt ist.

Beweis. Zu zeigen: Falls weder 1), noch 2) gelten, dann gilt 3).

- Sei $t_+ < \infty$ und $\lim_{t \to t_+} \inf \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$ und gelte (3) nicht, das heißt:
$$\exists M > 0, (t_j) \subset \mathbb{R} : t_j \to t_+, |x(t_j)| \le M, \operatorname{dist}((t_j, x(t_j)), \partial G) \ge \frac{1}{M} \ \forall j$$
- $(x(t_j)) \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt $\overset{BZW}{\Rightarrow}$ es gibt eine Teilfolge $(x(t_{j_k})) : x(t_{j_k}) \to x_* \ (k \to \infty)$
- $(t_{j_k}, x(t_{j_k})) \to (t_+, x_*) \in G$
- für Anfangsdaten (t_+, x_*) gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöff ein Existenzintervall $[t_+, t_+ + \delta_*]$ mit $\delta_* > 0$
- für jedes k gibt es für $(t_{j_k}, x(t_{j_k}))$ ein Existenzintervall $[t_{j_k}, t_{j_k} + \delta_k]$
- f ist stetig, das Existenzintervall hängt also stetig von (t_0, x_0) ab
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \delta_k \to \delta_* \ (k \to \infty) \\ &\Rightarrow \exists k_0 : \ \delta_k > \frac{\delta_*}{2}, \forall k \ge k_0 \end{aligned}$$
- für k groß genug ist $t_{j_k} + \delta_k > t_+$

Widerspruch! □

Beispiel.

1)
$$\begin{aligned} \dot{x} = x, \ x(0) = 1 \\ x(t) = e^t \end{aligned} \tag{Fall 1}$$

2)
$$\begin{aligned} &\dot{x} = -\frac{t}{x}, \ x(0) = 1 \\ &G = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \ \Rightarrow \partial G = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \\ &x\dot{x} = -t \ \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = -\frac{t^2}{2} + c \\ &x(t) = \pm\sqrt{c - t^2} \\ &x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = \sqrt{1 - t^2} \end{aligned} \tag{Fall 2}$$

$x(t)$ ist Lösung auf $(-1, 1)$ mit $\lim_{t \to \pm 1}(t, x(t)), \partial G) = 0$, da
$$\lim_{t \to \pm 1} = 0$$

3)
$$\begin{aligned} \dot{x} = x^2, x(0) = 1 \\ -x^{-1} = t + c \ \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t + c} \\ x(0) = 1 \ \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - t} \end{aligned} \tag{Fall 3}$$

$x(t)$ ist Lösung auf $(-\infty, 1)$ mit
$$\lim_{t \to t_-} |x(t)| = \infty$$

Dies ist ein Beispiel mit $G = \mathbb{R}^2$, sodass $\partial G = \emptyset$.

2.1. Globale Existenz

Betrachte

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \\ \text{mit } f \in C(G,\mathbb{R}^n) \text{ lokal lipschitzstetig in } x, \\ G = J \times \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall und } (t_0,x_0) \in G\end{gathered} \tag{2.3}$$

Frage. Wann ist die Lösung global, das heißt $(t_-,t_+) = J$?

Lemma 2.9 (Gronwall-Lemma) Sei $\alpha,\beta,\phi \in (C([a,b],\mathbb{R})$ mit $\beta(t) \geq 0\ \forall t \in [a,b]$ und sei $0 \leq \phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds$.
Dann gilt

(i)
$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds \quad \forall t \in [a,b].$$

Falls $\alpha(t) \equiv M$, dann

(ii)
$$\phi(t) \leq Me^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau} \quad \forall t \in [a,b].$$

Beweis. $\psi(t) := \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds$

- $$\left.\begin{array}{l}\beta,\phi \text{ stetig } \Rightarrow \psi \in C^1([a,b]), \dot{\psi} = \beta\phi \\ \beta \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq \alpha + \psi\end{array}\right\} \dot{\psi} \leq \beta(\alpha+\psi) \text{ auf } [a,b] \tag{2.3.1}$$

- $$\frac{d}{dt}(e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}\psi(t)) = e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau)}[\dot{\psi} - \beta\psi] \overset{(2.3.1)}{\leq} \beta(t)\alpha(t)e^{-\int_a^t \beta(t)d\tau}$$

- $$\int_a^t ds \Rightarrow e^{-\int_a^t \beta(\tau)d\tau}(\psi(t) - \underbrace{\psi(a)}_{=0}) \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}ds$$
$$\Rightarrow \psi(t) \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau - \int_a^s \beta(\tau)d\tau}ds = \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds$$
$$\Rightarrow \text{(i)}$$

Sei $a(t) \equiv M$. Aus (i) folgt

$$\begin{aligned}\phi(t) \leq M\left(1 + \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds\right) &\overset{\text{HS}}{=} M\left(1 - \left[e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\right]_a^t\right) \\ &= M\left(1 - \left(1 - e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\right)\right) \\ &= Me^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\end{aligned}$$

□

Korollar 2.10 Falls
$$|f(t,x)| \leq a(t) + b(t)|x|\ \forall t \in J, x \in \mathbb{R}^n$$
mit Funktionen $a,b \in C(J,[0,\infty))$, dann ist die Lösung $x(t)$ von (2.3) *global*, das heißt $(t_-,t_+) = J$.

Beweis.

1) Angenommen, $x(t)$ existiert nicht global nach rechts, also $t_+ \in J$. Da J offen ist, ist $t_+ \notin \partial J$ und wegen $G = J \times \mathbb{R}^n$ gilt Fall (2) nicht. Es gilt Fall (3), das heißt $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$.
   - (2.3) ist äquivalent zu $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, t \in [t_0, t_+)$
   - nach Voraussetzung ist $|x(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t a(s) + b(s)|x(s)|ds \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)|x(s)|ds$ mit $\alpha(t) := |x_0| + \displaystyle\int_{t_0}^t a(s)ds, \beta(s) := b(t) \geq 0$
   - Nach Gronwall ist $|x| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds \; \forall t \in [t_0, t_+)$
   - $\alpha, \beta \in C([t_0, t_+], \mathbb{R}) \Rightarrow$ die rechte Seite ist beschränkt auf $[t_0, t_+]$
     Widerspruch zu $|x| \to \infty$
   - Die globale Existenz nach links folgt aus der Zeitumkehr $t \to -t$

□

Korollar 2.11 (Lineare Systeme) Sei $J \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C(J, \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C(J, \mathbb{R}^n), t_0 \in J, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t), t \in J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine globale Lösung.

Beweis. $|A(t)x + b(t)| \leq |A(t)x| + |b(t)| \leq ||A(t)|||x| + |b(t)| \; \forall t \in J$
Mit Kor. 2.10 folgt die globale Existenz. □

Beispiel. (Gedämpftes Pendel)

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 \sin(x) = b(t) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R},\; b \in C(\mathbb{R}).$$

Wir schreiben diese Gleichung erst in ein System erster Ordnung um.

$$\begin{aligned} z_1 &:= x,\; z_2 : = \dot{x} \\ \dot{z} &= f(t, z) : = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\alpha z_2 - \omega^2 \sin(z_1) + b(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Funktion f gilt $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ und da $f(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ist auch f lokal lipschitz bezüglich x. Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt dann die eindeutige lokale Existenz der Lösung $z(t)$.

- $|f(t, z)|^2 = z_2^2 + (-\alpha z_2 - \omega^2 \sin(z_1) + b(t))^2$

$$\leq z_2^2 + 3(\alpha^2 z_2^2 + \omega^4 \underbrace{sin^2(z_1)}_{\leq z_1^2} + b^2(t))$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |f(t, z)|^2 \leq c(|z|^2 + b^2(t)) \\ &\Rightarrow |f(t, z)| \;\leq \tilde{c}(|z| + |b(t)|) \qquad (\text{da } \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \; \forall a, b \geq 0) \end{aligned}$$

$\overset{\text{Kor. 2.10}}{\Rightarrow} x(t)$ ist eine globale Lösung (d.h. auf $\mathbb{R}$)
$\hookrightarrow$ für jedes $\alpha, \omega \in \mathbb{R}, b \in C(\mathbb{R})$

3. Lineare Systeme

- Allgemeines System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b(t),\ t \in J \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0 \\ \text{mit } t_0 \in J,\ &A \in C(J, \mathbb{R}^{n\times n}),\ b \in C(J, \mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1. Homogene Systeme ($b \equiv 0$)

Wir betrachten

$$\dot{x} = A(t)x,\ t \in J \tag{3.2}$$

Bemerkung. (Superposition) Für zwei Lösungen u, v ist auch $\alpha u + \beta v$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Also ist die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungen von (3.2) ein *Vektorraum.*

Lemma 3.1 Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ zu (3.2) ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$, also ist $\dim \mathcal{L} = n$

Beweis. Betrachte für (3.2) mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ (für ein festes $t_0 \in J$) die Abbildung $T : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathcal{L} \subset C^1(J, \mathbb{R}^n) \\ x_0 \mapsto x(\cdot, x_0) \end{cases}$ mit $x(\cdot, x_0)$ Lösung von (3.2) mit $x(t_0) = x_0$.

Wir zeigen: T ist ein Isomorphismus.

1) $D(T) = \mathbb{R}^n$ und T ist wohldefiniert, da nach Kor. 2.11 eine eindeutige Lösung für jedes x_0 existiert.

2) T ist injektiv.

$$x_0^{(1)} \neq x_0^{(2)} \Rightarrow x(t_0, x_0^{(1)}) \neq x(t_0, x_0^{(2)}) \Rightarrow x(\cdot, x_0^{(1)}) \neq x(\cdot, x_0^{(2)})$$

3) T ist surjektiv.
 - jede Lösung hat einen Anfangswert.

4) T ist linear.
 Seien $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\left.\begin{aligned} T\left(\alpha x_0^{(1)} + \beta x_0^{(2)}\right) &= x\left(\cdot, \alpha x_0^{(1)} + \beta x_0^{(2)}\right) \\ \alpha T\left(x_0^{(1)}\right) + \beta T\left(x_0^{(2)}\right) &= \underbrace{\alpha x\left(\cdot, x_0^{(1)}\right) + \beta x\left(\cdot, x_0^{(2)}\right)}_{\text{ist mit Superposition eine Lösung}} \end{aligned}\right\} \text{beide Lösungen haben den Wert } \alpha x_0^{(1)} + \beta x_0^{(2)} \text{ in } t = t_0$$

$$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} T\left(\alpha x_0^{(1)} + \beta x_0^{(2)}\right) = \alpha T\left(x_0^{(1)}\right) + \beta T\left(x_0^{(2)}\right)$$

□

Definition.

- Eine Basis von $\mathcal{L}$ heißt ein *Fundamentalsystem* (FS) zu (3.2).
- Für beliebige Lösungen $y^{(j)}(t),\ j = 1, ..., n$ von (3.2) heißt $Y := \underbrace{\left(y^{(1)}, ..., y^{(2)}\right)}_{\text{Spalteneinträge}}$ eine *Lösungsmatrix* (LM).

- Falls $\{y(1), ..., y^{(n)}\}$ ein FS ist, dann heißt Y eine *Fundamentalmatrix* (FM).
- Eine FM Y mit dem Anfangswert $Y(t_0) = I, (t_0 \in J)$ heißt *Hauptfundamentalmatrix* (HFM).

Korollar 3.2

(i) Jede Lösungsmatrix Y erfüllt $\dot{Y} = A(t)Y$.

(ii) Sei Y eine FM. Für jede Lösung y von (3.2) existiert ein eindeutiges $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $y(t) = Y(t)c,\ t \in J$.

(iii) Sei $Z(t)$ eine LM und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Dann ist $Y(t) := Z(t)M$ auch eine LM.

Beweis. (i),(ii) sind klar.

(iii)

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t)M &= A(t)Z(t)M \\ &= A(t)Y(t)\end{aligned}$$

□

Definition. Sei $Y(t)$ eine LM von (3.2).

$$\phi(t) := \det(Y(t))$$

heißt die *Wronski-Determinante* von $Y(t)$.

Lemma 3.3 (Liouville-Formel) Für die Wronski-Determinante zur LM $Y(t)$ von (3.2) gilt

$$\dot{\phi}(t) = (\mathrm{Spur} A(t))\phi(t),\ t \in J. \qquad (\mathrm{Spur} M := \textstyle\sum_{j=1}^n M_{jj})$$

Also für $\tau \in J$ beliebig

$$\phi(t) = \phi(\tau)e^{\int_\tau^t \mathrm{Spur} A(s)ds},\ t \in J.$$

Korollar 3.4 Die Wronski-Determinante ist entweder 0 für alle $t \in J$ oder $\neq 0$ für alle $t \in J$.

Bemerkung. Zur Kontrolle, ob eine LM eine FM ist, reicht es daher, dies in **einem** Punkt zu zeigen.

Beweis. (von Lemma 3.3)

- Sei $t_0 \in J$ und $Z(t)$ die HFM mit $Z(t_0) = I$
- $\tilde{Y}(t) := Z(t)Y(t_0)$ ist eine LM mit $\tilde{Y}(t_0) = Y(t_0)$

$$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} Y(t) = \tilde{Y}(t)\ \forall t \in J$$

- $\dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt} \det Y(t)$

$$\begin{aligned}&= \frac{d}{dt}\det(Z(t)Y(t_0)) \\ &= \frac{d}{dt}(\det(Z(t))\underbrace{\det(Y(t_0)))}_{=\phi(t_0)} = \phi(t_0)\frac{d}{dt}\det Z(t)\end{aligned}$$

- Die Determinante ist linear in jeder Spalte, das heißt

$$\det\left(a^{(1)},...,a^{(j-1)},b,a^{(j+1)},...,a^{(n)}\right)+\det\left(a^{(1)},...,a^{(j-1)},c,a^{(j+1)},...,a^{(n)}\right)$$
$$=\det\left(a^{(1)},...,a^{(j-1)},b+c,a^{(j+1)},...,a^{(n)}\right)\ \ \forall j\in\{1,...,n\}$$
$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow}\frac{d}{dt}\det Z(t)=\sum_{j=1}^{n}\det\left(Z^{(1)}(t),...,Z^{(j-1)}(t),\frac{d}{dt}Z^{(j)}(t),Z^{(j+1)}(t),...,Z^{(n)}(t)\right)$$

- $Z^{(j)}(t_0)=e^{(j)}=(0,...,0,\underbrace{1}_{\text{j-te Stelle}},0,...,0)^T$

$$\frac{d}{dt}Z^{(j)}(t_0)=A(t_0)Z^{(j)}(t_0)=a^{(j)}(t_0)=\text{j-te Spalte von }A(t_0)$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\det Z(t_0)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\det(e_1,...,e_{j-1},a^{(j)}(t_0),e_{j+1},...,e_n)}_{a_j^{(j)}(t_0)}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(j)}(t_0)=\text{Spur }A(t_0)$$

- $t_0\in J$ beliebig

$$\Rightarrow\dot{\phi}(t)=(\text{Spur }A(t))\phi(t)\text{ für alle }t\in J.$$

□

3.2. Inhomogene Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A(t)x+b(t),\ \ t\in J\\ \text{mit }A&\in C\left(J,\mathbb{R}^{n\times n}\right),\ \ b\in C\left(J,\mathbb{R}^{n}\right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Satz 3.5 Sei $Y\in C^1\left(J,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ eine FM von (3.2) und $z\in C^1\left(J,\mathbb{R}^n\right)$ eine partikuläre Lösung von (3.3). Dann hat jede Lösung x von (3.3) die Form

$$x(t)=Y(t)c+z(t)\tag{3.4}$$

für ein $c\in\mathbb{R}^n$.

Beweis.

- Sei u eine Lösung und x wie in (3.4)
- $u-x$ erfüllt $\frac{d}{dt}(u-x)=A(t)(u-x)+b(t)-b(t)=A(t)(u-x)$
  Mit Kor. (3.2)(ii) folgt:
  $$u-x=Y\tilde{c}\text{ für ein }\tilde{c}\in\mathbb{R}^n$$
  $$\Rightarrow u=x+Y\tilde{c}=Y(c+\tilde{c})+z$$

□

Bemerkung.

1) Eine partikuläre Lösung findet man mithilfe der *Variation der Konstanten*:
Sei $z(t) := Y(t)c(t)$ mit $c \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ zu bestimmen.

$$\dot{z} = \underbrace{\dot{Y}}_{=Ay} c + Y\dot{c} = Az + \dot{Y}\dot{c} \stackrel{!}{=} Az + b$$
$$\Leftrightarrow Y\dot{c} = b \Leftrightarrow \dot{c} = Y^{-1}b \ (Y = \text{FM} \Rightarrow \text{regulär})$$

Wähle beliebiges $t_0 \in J$.

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)ds, \ t \in J.$$

Setze $c(t_0) = 0$ (Es wird **eine** Lösung gesucht.)

$$\Rightarrow Z(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)ds$$

2) Lösung des AWP (3.1):

$$x_0 \stackrel{!}{=} x(t_0) = Y(t_0)c + z(t_0) = Y(t_0)c \Rightarrow c = Y^{-1}(t_0)x_0$$

Damit ist die Lösung des AWP:

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)ds. \tag{3.17}$$

Satz 3.6 Sei $X \in C^1(J, \mathbb{R}^{n\times n})$ die HFM (mit $X(t_0) = I$) zu (3.3). Die Lösung von (3.1) ist

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds, \ t \in J.$$

Beweis. Folgt aus (3.17). □

3.3. Bestimmung der FM für $\dot{x} = A(t)x$, d'Alembert-Reduktion

Falls für (3.2) eine Lösung $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))^T$ mit $y_k/t) \neq 0$ für alle $t \in J$ bekannt ist, dann kann (3.2) zu einem System von $n-1$ Gleichungen reduziert werden:

- Sei $k \in \{1, ..., n\}$ so, dass $y_k \neq 0$ für alle $t \in J$
- Setze $x(t) = \phi(t)y(t) + z(t)$ mit $\phi \in C^1(J, \mathbb{R})$ und $z := (z_1, ..., z_{k-1}, 0, z_{k+1}, ..., z_n)^T$ zu bestimmen.
- Dann

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{\phi}y + \phi\dot{y} + \dot{z} &= \dot{\phi}y + \phi A(t)y + \dot{z} \\ &\stackrel{!}{=} A(t)(\phi y + z) \\ \Rightarrow \dot{z} &= A(t)z - \dot{\phi}y \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

- Für die k-te Komponente ist $z_k = 0$, also ist

$$\dot{\phi} = \frac{1}{y_k}(A(t)z)_k = \frac{1}{y_k}\sum_{l=1, l\neq k}^{n} a_{kl}(t)z_l$$

- nach Einsetzen von ϕ in (3.2.1):

$$\dot{z}_j = \left(\sum_{l=1, l\neq k}^{n} a_{jl}(t) - a_{kl}(t)\frac{y_j(t)}{y_k(t)} \right) z_l,\ \ j \in \{1, ..., n\} \setminus \{k\} \tag{3.2.2}$$

  ist ein homogenes System von $n-1$ Gleichungen.

- Falls für (3.2.2) eine nichttriviale Lösung existiert, kann das Problem auf $n-2$ Gleichungen reduziert werden (usw.).

Beispiel.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x,\ \ t \in J = (0, \infty)$$

- Eine Lösung $y(t) = (t^2, -t)^T$
- Aus (3.2.2) mit $k = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \left(\frac{2}{t} + \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right) z_2 \\ &= \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t} \right) z_2 \\ &= \frac{z_2}{t} \\ \Rightarrow z_2 &= ct,\ \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wir suchen *eine* (beliebige) Lösung, dazu wird $c = 1$ gesetzt.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{y_1} a_{12} z_2 \\ &= -\frac{t}{t^2} = -\frac{1}{t} \\ \Rightarrow \phi(t) &= -\log(t) \qquad \text{Integrationskonstante} = 0 \text{ gewählt} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Also

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)y(t) + z(t) \\ &= \begin{pmatrix} -t^2 \log(t) \\ t\log(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist auch eine Lösung.

$$\Rightarrow Y(t) = (y(t)\ x(t)) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \log(t) \\ -t & t(1 + \log(t)) \end{pmatrix}$$

ist eine FM (da x und y linear unabhängig sind)

3.4. Bestimmung des FS für $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstant

Betrachte

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax,\ t \in \mathbb{R} \\ \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir zeigen: e^{tA} ist die HFM. Was ist aber e^A für eine Matrix A?

Definition. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$$e^A := \exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \tag{3.5.1}$$

heißt das *Matrixpotential* von A. Wir benutzen oben die Notation $A^0 := I$.

Lemma 3.7 e^A ist wohldefiniert, das heißt (3.5.1) konvergiert für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (in jeder Norm in $\mathbb{C}^{n\times n}$)

Beweis.
Sei $S_p := \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$.

- (3.5.1) konvergiert, falls $(S_p) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Cauchy-Folge ist (da $\mathbb{C}^{n\times n}$ vollständig ist).
- Sei $\varepsilon > 0$ und wähle eine submultiplikative Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ (d.h. $||AB|| \le ||A||||B||$) für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$); (z.B. die Frobenius-Norm). Dann ist (für $q \ge p$)

$$||S_p - S_q|| = ||\sum_{k=p+1}^{q} \frac{A^k}{k!}|| \le \sum_{k=p+1}^{q} \frac{||A||^k}{k!}$$

- Die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!}$ konvergiert (gegen $e^{||A||}$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=p+1}^{q} \frac{||A||^k}{k!} \le \varepsilon\ \forall q > p \ge N \\ &\Rightarrow ||S_p - S_q|| < \varepsilon\ \forall q > p > N \\ &\Rightarrow (S_p) \text{ ist eine Cauchy-Folge} \end{aligned}$$

- in $\mathbb{C}^{n\times n}$ sind alle Normen äquivalent

$$\Rightarrow \text{(3.5.1) konvergiert in jeder Norm.}$$

□

Bemerkung. Falls $AB = BA$, dann ist $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$. Insbesondere gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Beweis. Wie in $\mathbb{R}$, aber z.B. $(A+B)^2 = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{2AB \text{ falls } AB=BA} + B^2$ □

Lemma 3.8

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}$$

und $\Phi(t) := e^{tA}$ ist die HFM zu (3.5). $x(t) = e^{tA}x_0$ ist die eindeutige Lösung von (3.5) mit $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.

1)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} A\frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(\underbrace{k-1}_{j})!} = \sum_{j=0}^{\infty} A\frac{t^jA^j}{j!} = Ae^{tA}$$
$$\Rightarrow \Phi(t) := e^{tA} \text{ ist eine LM}$$

- $\Phi(0) = I \Rightarrow \Phi$ ist die HFM

2) $x(t) := e^{tA}x_0$ löst (3.5), da

$$\dot{x} = Ae^{tA}x_0 = Ax,$$
$$x(0) = Ix_0 = x_0.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöff.

□

Bemerkung. Die Lösung von (3.3) mit A konstant ist also

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Frage. Wie berechnet man e^{tA} praktisch?

Definition. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es ein invertierbares $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass $B = T^{-1}AT$.

Lemma 3.9 Für ähnliche Matrizen mit $B = T^{-1}AT$ ist $e^B = T^{-1}e^AT$.

Beweis.

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-1}\frac{A^k}{k!}T = T^{-1}e^AT$$

□

3.4.1. e^{tA} für diagonalisierbares A

Erinnerung: Falls n linear unabhängige E-Vektoren $\{v^{(1)}, ..., v^{(n)}\}$ von A existieren, genau dann ist A diagonalisierbar.

$$V^{-1}AV = \Lambda \text{ (d.h. } A \text{ ist ähnlich zu } \Lambda), \tag{3.5.2}$$

wobei

$$V = \left(v^{(1)}, ..., v^{(n)}\right),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und λ_j Eigenwert zu $v^{(j)}$ ist.

Bemerkung.

1) (3.5.2) folgt aus

$$\begin{aligned} AV &= A\left(v^{(1)}, ..., v^{(n)}\right) \\ &= \left(\lambda_1 v^{(1)}, ..., \lambda_n v^{(n)}\right) = V\Lambda \\ \Rightarrow V^{-1}AV &= \Lambda \end{aligned}$$

2) Eigenwerte müssen für die Diagonalisierbarkeit nicht verschieden sein. Falls aber λ_j $(j = 1, ..., n)$ verschieden sind, dann ist A diagonalisierbar.

3) Für ein Eigenpaar $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ist $x(t) := e^{\lambda t}v$ eine Lösung.

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av = A\left(e^{\lambda t}v\right) = Ax$$

4) Für $A = V\Lambda V^{-1}$ gilt $e^{tA} = e^{tV\Lambda V^{-1}} = Ve^{t\Lambda}V^{-1}$ wegen Lemma 3.9

Lemma 3.10 Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist mit $V^{-1}AV = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dann ist $Ve^{t\Lambda} = \left(v^{(1)}e^{\lambda_1 t}, ..., v^{(n)}e^{\lambda_n t}\right)$ eine FM für $\dot{x} = Ax$.

Beweis.

- $e^{tA} = Ve^{t\Lambda}V^{-1}$ ist die HFM. Also folgt:

  $$e^{tA}V = Ve^{t\Lambda}$$

  ist eine FM, weil e^{tA} und V regulär sind

- $e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\Lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow Ve^{t\Lambda} = \left(v^{(1)}e^{t\lambda_1}, ..., v^{(n)}e^{t\lambda_n}\right)$

$\square$

Bemerkung. (reelles FS)

1) Eigenwerte und Eigenvektoren können komplex sein, auch für A reell.

2) Für A reell existiert aber immer ein reelles FS:

   (i) Sei $x = x_R + ix_I$ eine Lösung. Dann sind auch x_R und x_I Lösungen:

   $$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(x_R + ix_I) = A(x_R + ix_I) \\ &\overset{\mathrm{Re}(),\mathrm{Im}()}{\Rightarrow} \dot{x}_R = Ax_R,\ \dot{x}_I = Ax_I \end{aligned}$$

   (ii) Sei (λ, v) ein Eigenpaar von A. Dann ist auch $(\overline{\lambda}, \overline{v})$ ein Eigenpaar. Es gibt also linear unabhängige Lösungen $e^{\lambda t}v, e^{\overline{\lambda}t}\overline{v}$. Offenbar ist $\mathrm{Span}\{x, \overline{x}\} = \mathrm{Span}\{\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x)\}$

(iii) Für $\lambda = \mu + i\nu$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $\nu = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(e^{\lambda t} v) &= e^{\mu t}(a\cos(\nu t) - b\sin(\nu t))\\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t} v) &= e^{\mu b}(a\sin(\nu t) + b\cos(\nu t))\end{aligned}$$

Daraus folgt folgendes Lemma:

Lemma 3.11 Falls in Lemma 3.10 $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\lambda_{p+1}, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ und mit Eigenvektoren $v^{(j)} = a^{(j)} + ib^{(j)}, j = 1, ..., n$, wobei $b^{(j)} = 0$ $(j = p+1, ..., n)$, dann ist

$$\left\{e^{\lambda_{p+1}t} v^{(p+1)}, ..., e^{\lambda_n t} v^{(n)}\right\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} \left(\left(a^{(j)}\cos(\nu_j t) - b^{(j)}\sin(\nu_j t)\right) e^{\mu_j t}\right), \left(e^{\mu_j t}\left(a^{(j)}\sin(\nu_j t) + b^{(j)}\cos(\nu_j t)\right)\right)\right)$$

ein Fundamentalsystem.

Beispiel.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x =: Ax\\ p(\lambda) &= \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i\\ (A - \lambda_1 I)v^{(1)} &= \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v^{(1)} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\\ (A - \lambda_2 I)v^{(2)} &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} v^{(2)} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\overset{L.3.10}{\Rightarrow}$ eine Fundamentalmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & -e^{-it} \\ ie^{it} & ie^{it} \end{pmatrix}$$

- Lemma 3.11 würde ein reelles Fundamentalsystem liefern.
- Die HFM ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2i} &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i\cos(t) & 2i\sin(t) \\ -2i\sin(t) & 2i\cos(t) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bemerkung. Die HFM zu $\dot{x} = Ax$ mit A reell ist immer reell (für alle t), weil

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \text{ (jeder Summand ist reell)}$$

3.4.2. e^{tA} für allgemeines $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

In diesem Abschnitt wird die Jordansche Normalform benutzt, siehe Appendix A.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gibt $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, sodass

$$A = TJT^{-1} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}.$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j\times s_j} \text{ (falls } s_j = 1\text{, dann } J_j = \lambda_j)$$

und mit

$$T = \left(v^{(1,1)}, ..., v^{(1,s_1)}, v^{(2,1)}, ..., v^{(2,s_2)}, ..., v^{(m,1)}, ..., v^{(m,s_m)}\right).$$

Hier sind $v^{(j,1)}, ..., v^{(j,s_j)}$ Hauptvektoren zu λ_j und $v^{(j,1)}$ ein Eigenvektor zu λ_1.
Also $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$.
Form von e^{tJ}:

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow e^{tJ} \quad = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$$

$$J_j = \lambda_j I + N_j,\ N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s_j\times s_j}$$

- I und N_j kommutieren. Daraus folgt

$$e^{tJ_j} = e^{t\lambda_j I} e^{N_j t} =: e^{t\lambda_j} e^{tN_j}$$

- $N_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \ \dots,\ N_j^{s_j} = 0$, das heißt, N_j ist nilpotent

$$\Rightarrow N_j^k = 0\ \forall k \geq s_j$$

$$\Rightarrow e^{tN_j} = \sum_{k=0}^{s_j-1} \frac{t^k N_j^k}{k!} = I + tN_j + \ldots + \frac{t^{s_j-1} N_j^{s_j-1}}{(s_j-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} e^{tN_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_m t} e^{tN_m} \end{pmatrix} \text{ mit } e^{tN_j} \text{ wie oben.}$$

Lemma 3.12 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Jordanschen Normalform $J = T^{-1}AT$. Dann ist $Te^{tJ}T^{-1}$ die HFM von $\dot{x} = Ax$ und $Te^{tJ} = (M_1|\dots|M_m)$ ist eine FM. Dabei ist

$$M_j = e_j^{\lambda}t\left(v^{(j,1)}, v^{(j,1)}t + v^{(j,2)}, \dots, v^{(j,1)}\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!} + \dots + v^{(j,s_j-1)}t + v^{(j,s_j)}\right)$$

Beweis. Analog zu Lemma 3.10. □

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x =: Ax \\
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2,\ \sigma(A) = \{-1\} \\
&\Rightarrow \text{das ist ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2} \\
(A - (-1)I)v &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v \overset{!}{=} 0 \Rightarrow v = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \text{ die geom. Vielfachheit ist } 1 \Rightarrow \text{A ist nicht diagonalisierbar.}
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.11 folgt: Es gibt zwei Lösungen $x^{(1)}(t) = ve^{-t},\ x^{(2)}(t) = (vt + w)e^{-t}$ mit einem $w \in \mathbb{R}^2$.
Bestimme w durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^{(2)}(t) &= ve^{-t} - (vt + w)e^{-t} \overset{!}{=} A(vt + w)e^{-t} \\
\Rightarrow (A + I)w = v \Rightarrow \dots \Rightarrow w &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t},\ x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} e^{-t} \text{ ein Fundamentalsystem.}$$

3.5. Lineare skalare ODEs höherer Ordnung

3.5.1. Allgemeiner Fall

Betrachte ODEs n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} g(t)x^{(j)} = b(t),\ t \in [t_0, t_1] =: J \tag{3.6}$$

mit $a_j, b \in C(J, \mathbb{R})$ und mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Dies kann zu einem System erster Ordnung transformiert werden:

$$\begin{aligned}
u_k &:= x^{(k-1)},\ k = 1, ..., n \\
u_{0,k} &:= x_{k-1} \\
f(t) &:= (0, ..., 0, b(t))^T.
\end{aligned}$$

Gleichung (3.6) ist nämlich äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= A(t)u + f(t), \\
u(t_0) &= u_0,
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots \\ 0 & 0 & 1 & & \dots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix zu $\dot{u} = A(t)u$. Die allgemeine homogene Lösung zu (3.6.1) ist $u_h(t) = Y(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$.
Eine partikuläre Lösung zu (3.6.1) lautet:

$$u_p(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) f(s) ds.$$

Also lautet die allgemeine Lösung zu (3.6):

$$x(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j Y_{1,j}(t)}_{=u_{h,1}(t)} + \underbrace{\left(Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) f(s) ds\right)_1}_{=u_{p,1}(t)}$$

mit $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

ODE zweiter Ordnung

Wir betrachten nun ODE zweiter Ordnung ($n = 2$). Hier ist $Y(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}$, wobei x_1 und x_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (3.6) sind.
Sei

$$z := Y^{-1} f.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & -x_2 \\ -\dot{x}_1 & x_1 \end{pmatrix} f \\ &= \frac{1}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & -x_2 \\ -\dot{x}_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{b}{\phi} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \phi := x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 \end{aligned}$$

Also ist eine partikuläre Lösung von (3.6):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \left(Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) f(s) ds\right)_1 \\ &= -x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(s) b(s)}{\phi(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s) b(s)}{\phi(s)} ds \end{aligned}$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel.

$$\ddot{x} + x = \sin(t),\ t_0 = 0$$

Als System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1 &:= x,\ u_2 := \dot{x} \\ \dot{u} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie wir in einem obigen Beispiel gerechnet haben, ist die HFM für das homogene Problem:

$$Y(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \\ x_p(t) &= -\cos(t)\int_0^t \sin^2(s)ds + \sin(t)\int_0^t \sin(s)\cos(s)ds \\ &= \ldots = \frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t)). \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + \frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t)).$$

3.5.2. Homogene ODEs mit konstanten Koeffizienten

Betrachte

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0,\ a_j \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

Als System erster Ordnung ist (3.7):

$$\dot{u} = Au \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & & \ldots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Da A konstant ist, folgt die globale Existenz für $\dot{u} = Au$ und daraus die globale Existenz für (3.7).

Unser Ziel ist die Bestimmung eines Fundamentalsystems ohne die Berechnung von e^{tA}.
Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

mit $a_n := 1$.

Bemerkung. Das charakteristische Polynom erhält man auch durch das Einsetzen von $x(t) = e^{\lambda t}$ in die linke Seite von (3.7).

Lemma 3.13 Falls λ_* eine Nullstelle von $p(\lambda)$ von der Vielfachheit ν ist, dann sind

$$e^{\lambda_* t},\ te^{\lambda_* t}, ..., t^{\nu-1}e^{\lambda_* t}$$

linear unabhängige Lösungen von (3.7).

Beweis. (Ohne die Jordansche Normalform)

- die lineare Unabhängigkeit ist klar, da $\{1, t, t^2, \ldots, t^{\nu-1}\}$ linear unabhängig sind.
- Zu zeigen ist, dass $x(t) = t^l e^{\lambda_* t}$ eine Lösung von (3.7) ist, für $l \in \{0, 1, \ldots, \nu - 1\}$.

$$\begin{aligned}
\partial_t^j \left(t^l e^{\lambda t}\right) &= \partial_t^0 \partial_\lambda^l \left(e^{\lambda t}\right) \\
&= \partial_\lambda^l \partial_t^j \left(e^{\lambda t}\right) \\
&= \partial_\lambda^l \left(\lambda^j e^{\lambda t}\right) \\
\Rightarrow x^{(j)}(t) &= \partial_\lambda^l \left(\lambda^j e^{\lambda t}\right) |_{\lambda=\lambda_*}
\end{aligned}$$

In der Differentialgleichung (3.7): (mit $a_n := 1$)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n a_j x^{(j)}(t) &= \sum_{j=0}^n \partial_\lambda^l \left(\lambda^j e^{\lambda t}\right) |_{\lambda=\lambda_*} \\
&= \partial_\lambda^l \left(\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j e^{\lambda t}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_*} = \partial_\lambda^l \left(p(\lambda) e^{\lambda t}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_*} \\
&= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \underbrace{p^{(j)}(\lambda_*)}_{=0,\ \forall j=0,\ldots,\nu-1,\text{ da } \lambda_* \text{ eine } \nu\text{-fache Nullstelle}} t^{l-j} e^{\lambda_* t} = 0
\end{aligned}$$

für alle $l = 0, \ldots, \nu - 1$. Der vorletzte Schritt in der obigen Rechnung folgt mit der Leibniz-Formel. □

Lemma 3.14 Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Nullstellen von $p(\lambda)$ mit Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Dann ist

$$\cup_{j=1}^m \left\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{\nu_j - 1} e^{\lambda_j t}\right\}$$

ein im Allgemeinen komplexes Fundamentalsystem für (3.7). Falls $a_j \in \mathbb{R}\ \forall j$, dann ist

$$\bigcup_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \in \mathbb{R}}}^m \left\{e^{\lambda_j t} t^p, p = 0, \ldots, \nu_j - 1\right\} \cup \left\{ \bigcup_{\substack{j=1 \\ \mathrm{Im}(\lambda_j) > 0}}^m \left\{\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_j t}\right) t^p, \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_j t}\right) t^p, p = 0, \ldots, \nu_j - 1\right\} \right\}$$

ein reelles Fundamentalsystem.

Beweis. Betrachte

$$q(t) = \sum_{j=1}^m q_j(t) e^{\lambda_j t}$$

mit Polynomen $q_j(t)$ vom Grad $\nu_j - 1$.
Zu zeigen ist, dass aus $q \equiv 0$ auch $q_j \equiv 0 \ \forall j$ folgt. Dann ist der Beweis fertig, da $q_j \equiv 0$ dazu äquivalent ist, dass alle Koeffizienten in q_j Null sind.
Induktionsanfang:

$$m = 1 \text{ (Hier ist der Fall nach Lemma 3.13 klar)}$$

Induktionsschritt:

$$m \to m+1$$

Angenommen,

$$\sum_{j=1}^{m} q_j(t)e^{\lambda_j t} + q_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1}t} = 0 \text{ mit } \lambda_{m+1} \neq \lambda_j \ \forall j = 1, \dots, m$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{m} q_j(t)e^{\mu_j t} + q_{m+1}(t) = 0, \ \mu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1} \ (\neq 0) \tag{3.7.1}$$

Wir differenzieren s (=Grad $q_{m+1} + 1$)-mal und erhalten

$$\sum_{j=1}^{m} r_j(t)e^{\mu_j t} \equiv 0 \text{ mit Polynomen } r_j$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
r_j &\equiv 0 \ \forall j = 1, \dots, m && (3.7.2)\\
\frac{d}{dt}\left(q_j e^{\mu_j t}\right) &= \Big(\underbrace{\dot{q}_j + \mu_j q_j}_{\text{Grad} = \text{Grad }(q_j)}\Big) e^{\mu_j t}\\
\frac{d^s}{dt^s}(q_j e^{\mu_j t}) &= r_j e^{\mu_j t} \text{ mit Grad}(r_j) = \text{Grad}(q_j)\\
&\equiv 0 \text{ nach (3.7.2)}\\
\Rightarrow q_j e^{\mu_j t} &\text{ ist ein Polynom}\\
\Rightarrow q_j &\equiv 0 \overset{(3.7.1)}{\Rightarrow} q_{m+1} = 0
\end{aligned}$$

□

Beispiel. (gedämpfter Oszillator)

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \text{ mit } m\text{=Masse, } \beta \text{ =Reibungskoeffizient und } k \text{ =Federkonstante}$$

Charakteristische Gleichung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0, \text{ wobei } a = \frac{\beta}{2m}, \ b = \frac{k}{m}$$

Wurzeln:

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + b}.$$

Wir suchen zwei linear unabhängige Lösungen $x_1, \ x_2$.

Es gibt drei Fälle:

(a) $a^2 > b$ (große Reibung)

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\left(-a+\sqrt{a^2-b}\right)t}$$
$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\left(-a-\sqrt{a^2-b}\right)t}$$

(b) $a^2 < b$ (kleine Reibung)

$$x_1(t) = e^{-at}e^{i\sqrt{b-a^2}t}$$
$$x_2(t) = e^{at}e^{-i\sqrt{b-a^2}t}$$

reelle Lösungen:

$$x_1(t) = e^{-at}\cos\left(t\sqrt{b-a^2}\right)$$
$$x_2(t) = e^{-at}\sin\left(t\sqrt{b-a^2}\right)$$

(c) $a^2 = b$

$$\lambda = -a \text{ (das ist eine doppelte Nullstelle)}$$
$$x_1(t) = e^{-at},\ x_2(t) = te^{-at}$$

4. Stetige Abhängigkeit

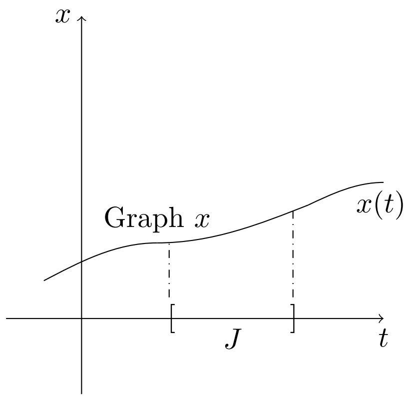
Betrachte

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \\ f \in C\left(G, \mathbb{R}^n\right) \text{ lokal lipschitzstetig in } x \\ \text{mit } G \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen und } (t_0, x_0) \in G \end{aligned} \tag{4.1}$$

Frage. Hängt die Lösung x stetig von den Daten, das heißt von $t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ und f ab?

Notation.

- (t_-, t_+) = maximales Existenzintervall
- Für jedes $J \subset (t_-, t_+)$ kompakt ist $\mathrm{Graph}_j(t) := \{(t, x(t)) : t \in J \subset G\}$ der *Graph* von x auf J



Definition. *x hängt stetig von (t_0, x_0, f) ab*, falls es zu jedem kompakten Intervall $J \subset (t_-, t_+)$ eine kompakte Umgebung $K \subset G$ von $\mathrm{Graph}_J x$ existiert, sodass die Lösung y von

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(t, y), \ t \in J \\ y(\tau_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

existiert und $|x(t) - y(t)| < \varepsilon \ \forall t \in J$ erfüllt, falls $g \in C(J, \mathbb{R}^n)$ lokal lipschitzstetig in y ist und $|\tau_0 - t_0| \le \delta, \ |x_0 - y_0| \le \delta,$ sowie $\sup\limits_{(s,z) \in K} |f(s, z) - g(s, z)| \le \delta.$

Satz 4.1 Die Lösung von (4.1) hängt stetig von (t_0, x_0, f) ab.

Beweis. Sei y die Lösung von (4.2) auf ihrem maximalen Existenzintervall (τ_-, τ_+).

1) Es gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ y(t) &= y_0 + \int_{\tau_0}^t g(s, y(s)) ds \\ \Rightarrow x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \int_{\tau_0}^t f(s, x(s)) - g(s, y(s)) ds \\ &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \int_{\tau_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \\ &\quad + \int_{\tau_0}^t f(s, y(s)) - g(s, y(s)) ds \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

2) Sei $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$. Seien weiter $\alpha, \eta > 0$ so klein, dass $[a - \eta, b + \eta] \subset [t_-, t_+]$ und $K := \{(t, y) : t \in [a - \eta, b + \eta], \ |x(t) - \eta| \le \alpha\} \subset G$. Da K kompakt ist, folgt, dass $f|_K$ global lipschitzstetig in x ist (mit einer Lipschitzkonstante $L > 0$). Sei

$$M := \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in K\}.$$

Aus (4.2.1) folgt

$$|x(t) - y(t)| \le \underbrace{|x_0 - y_0|}_{\le \delta} + M \underbrace{|t_0 - \tau_0|}_{\le \delta} + L \int_{\tau_0}^t |x(s) - y(s)| ds + \delta \underbrace{|t - \tau_0|}_{b - a + 2\eta} \ \forall t \in [\tau_0, \min\{b, \tau_+\}),$$

falls

$$(s, y(s)) \in K \text{ für alle } s \in [\tau_0, t]$$

Daraus folgt

$$|x(t) - y(t)| \le C\delta + L \int_{\tau_0}^t |x(s) - y(s)| ds,$$

wobei

$$C = 1 + M + b - a + 2\eta,$$

falls

$$(s, y(s)) \in K \text{ für alle } s \in [\tau_0, t].$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt:

$$|x(t) - y(t)| \leq C\delta e^{L(t-\tau_0)} \text{ solange } (t, y(t)) \in K. \tag{4.2.2}$$

3) Zu zeigen ist $(t, y(t)) \in K \ \forall t \in [a, b]$. Dann folgt nach dem Fortsetzungssatz, dass die Lösung $y(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ existiert.
Sei zunächst $\delta > 0$ so klein, dass die rechte Seite von (4.2.2) auf $[a, b]$ kleiner als α wird.
Angenommen, es gäbe ein erstes $t_* \in [\tau_0, \min\{b, \tau_+\})$, sodass

$$|x(t_*) - y(t_*)| = \alpha$$

Aus (4.2.2) folgt dann der Widerspruch

$$|x(t_*) - y(t_*)| < \alpha.$$

Analog argumentiert man für $t_* \in (\max\{a, \tau_-\}, \tau_0]$.

4) Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so klein, dass die rechte Seite von (4.2.2) auf $[a, b]$ kleiner als ε wird.

$\square$

Beispiel.

1) $\dot{x} = f(t) := \alpha x, \ x(0) = \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Nach Satz 4.1 hängt x stetig von f und β ab, das heißt von $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
In der Tat gilt:

$$x(t) = \beta e^{\alpha t}$$

und die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to C(J, \mathbb{R}) \\ (\alpha, \beta) \mapsto \beta e^{\alpha t} \end{cases}$$

ist stetig.

2) $\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, \ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Nach Satz 4.1 ist x stetig in α.

$$\begin{aligned} \alpha \neq 0: \ x_\alpha(t) &= c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \\ x_\alpha(0) &\overset{!}{=} (1,1)^T \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{\alpha}, \ c_1 = 1 + \frac{1}{\alpha} \\ \alpha = 0: \ x_0(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt: Gilt dann $\sup_{t\in J}|x_\alpha(t) - x_0(t)| \to 0 \ (\alpha \to 0)$?

Ja, weil:

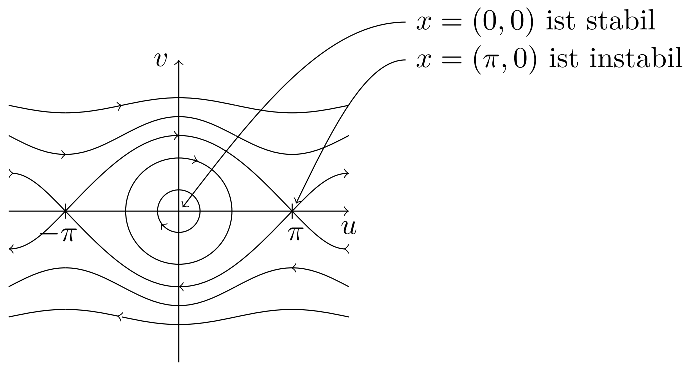
$$\begin{aligned}
(x_\alpha)_1(t) &= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j\alpha^j}{j!} - \frac{1}{\alpha} \\
&= 1 + t + \alpha t + (1 + \frac{1}{\alpha})(e^{\alpha t} - 1 - \alpha t) \\
\Rightarrow |x_\alpha(t) - x_0(t)| &= \left(\left(\frac{1}{|\alpha|}|e^{\alpha t} - 1 - t|\right)^2 + \mathcal{O}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{|\alpha|}|e^{\alpha t} - 1 - t| \\
\Rightarrow |x_\alpha(t) - x_0(t)| &\le |\alpha| + |1 + \tfrac{1}{\alpha}|(\tfrac{\alpha^2}{2}t^2 e^{\alpha_* t})
\end{aligned}$$

für ein $\alpha_* \in [0, \alpha]$. Also $|x_\alpha(t) - x_0(t)| \to 0$ für alle $t \in J$, falls $\alpha \to 0$.

5. Stabilität

Grob formuliert:

"Die Lösung $x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist stabil, falls Lösungen mit Anfangsbedingungen nahe an x_0 in der Nähe von $x(t)$ für alle $t > 0$ bleiben"



Betrachte nun

$$\begin{gathered}
\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0 \\
\text{mit } f \in C(\mathbb{R} \times G, \mathbb{R}^n) \text{ lokal lipschitzstetig in } x, \\
G \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und } t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in G
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Untersuche die Stabilität einer festen Lösung $x_*(t),\ t \ge t_0$ mit $x_*(t_0) = x_{0*}$.

- Sei $y(t) = x(t) - x_*(t)$, wobei $x(t)$ eine Lösung von (5.1) ist.

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_*(t) &= f(t, x(t)) - f(t, x_*(t)) \\
&= f(t, y(t) + x_*(t)) - f(t, x_*(t)) =: g(t, y(t)).
\end{aligned}$$

- $g(t, 0) \equiv 0$ impliziert: $y(t) \equiv 0$ ist eine Lösung von $\dot{y} = g(t, y)$.
- $y(t)$ bleibt nahe an 0 genau dann, wenn $x(t)$ nah an $x_*(t)$ bleibt. Das Stabilitätsproblem für x_* kann also immer zum Stabilitätsproblem der Lösung $y(t) \equiv 0$ umgeschrieben werden. Also reicht es, die *Stabilität von 0* zu untersuchen.

Definition. Sei f wie in (5.1) mit $f(t,0) \equiv 0$ und $x(t;x_0)$ sei die Lösung von (5.1) mit $x(t_0) = x_0$ für $t \in [t_0, \infty)$.

(i) Die Lösung $x_* = 0$ heißt *stabil*, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \overline{B_\delta(0)} \subset G$, die Lösung $x(t;x_0)$ zu $x_0 \in \overline{B_\delta(0)}$ existiert für alle $t \in [t_0, \infty)$ und $|x(t;x_0)| \leq \varepsilon\ \forall t \in [t_0, \infty)$,

(ii) $x_* = 0$ heißt *instabil*, falls sie nicht stabil ist,

(iii) $x_* = 0$ heißt *attraktiv*, falls $\exists \delta_0 > 0 : \overline{B_{\delta_0}(0)} \subset G$, die Lösung $x(t;x_0)$ zu $x_0 \in \overline{B_\delta(0)}$ existiert für alle $t \in [t_0, \infty)$ und $\lim_{t\to\infty} x(t;x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \overline{B_\delta(0)}$.

(iv) $x_* = 0$ heißt *asymptotisch stabil*, falls sie stabil und attraktiv ist.

Beispiel.

1) $\dot{x} = \alpha x,\ \ \alpha \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$
   - Sei $x(t;x_0)$ die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$
   - Die triviale Lösung $x_* = 0$ ist
     (a) *stabil* für $\alpha \leq 0$, weil $|x(t;x_0)| = |x_0|e^{\alpha t} \leq |x_0|$
     (Also für $\varepsilon > 0$ ist $|x(\alpha, 0)| < \varepsilon\ \forall |x_0| < \delta := \varepsilon$)
     (b) *instabil* für $\alpha > 0$, weil $\lim_{t\to\infty} |x(t;x_0)| = \infty\ \forall x_0 \neq 0$
     (c) *asymptotisch stabil*, falls $\alpha < 0$, weil $\lim_{t\to\infty} x(t;x_0) = 0$

2) harmonischer Oszillator ($\ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) Die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = x_1$ ist

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_1}{\omega} \sin(\omega t) \\
\Rightarrow |x(t)|^2 &= x_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{x_1^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) + 2x_0 \frac{x_1}{\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\
&\leq 2 \left(x_0^2 + \frac{x_1^2}{\omega^2} \right)
\end{aligned}$$

Es folgt die Stabilität von $x_* = 0$, jedoch handelt es sich nicht um asymptotische Stabilität, da $x(t) \not\to 0$.

5.1. Ebene lineare autonome Systeme

Wir untersuchen die Stabilität der trivialen Lösung $x_* = 0$ von

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wir zeigen, dass die Eigenwerte von A die Stabilität von $x_* = 0$ beschreiben. Sei $p := a_{11} + a_{22}$ und $q := \det A$. Die Eigenwerte von A sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

$\boxed{\textbf{Fall 1: } q < \frac{p^2}{4}}$

Hier $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gibt also zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v^{(1)}, v^{(2)}$. Jede Lösung hat die Form

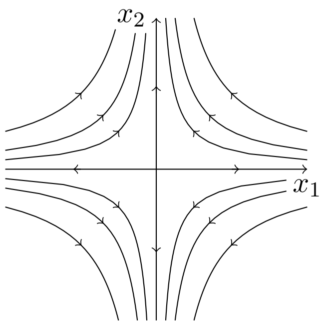
$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t), \quad \text{wobei } x^{(j)}(t) = v^{(j)} e^{\lambda_j t}, c_j \in \mathbb{R}.$$

Bem.: Für die Bilder wurden gewählt $v^{(1)} = (1,0)^T, v^{(2)} = (0,1)^T$.

1a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \;\Leftrightarrow\; q < 0$

- $|x^{(1)}(t)| \to 0$, $|x^{(2)}(t)| \to \infty$ $(t \to \infty)$

  $\Rightarrow$ $x_* = 0$ **instabil** (*Sattelpunkt*)

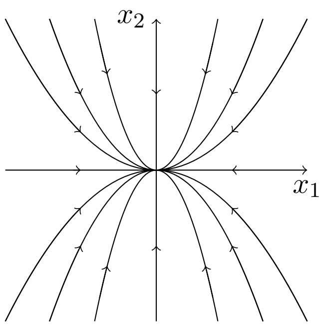


1b) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \;\Leftrightarrow\; q \in (0, p^2/4), p < 0$

- $|x^{(j)}(t)| \to 0$ monoton $(t \to \infty), j = 1, 2$

  $\Rightarrow$ $x_* = 0$ **asymptotisch stabil** (*stabiler Knoten*)

Bem.: Für das Bild wurde $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ gewählt.

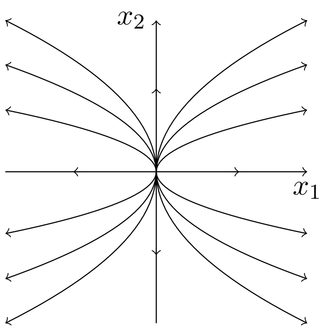


1c) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \;\Leftrightarrow\; q \in (0, p^2/4), p > 0$

- $|x^{(j)}(t)| \to \infty$ $(t \to \infty), j = 1, 2$

  $\Rightarrow$ $x_* = 0$ **instabil** (*instabiler Knoten*)

Bem.: Für das Bild wurde $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ gewählt.

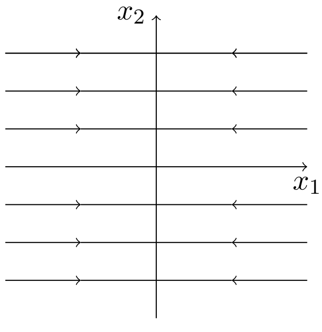


1d) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; q = 0, p < 0$

- $|x^{(1)}(t)| \to 0$ monoton $(t \to \infty)$, $|x^{(2)}(t)| \equiv c$

  $\Rightarrow$ $x_* = 0$ **stabil aber nicht asymptotisch stabil**

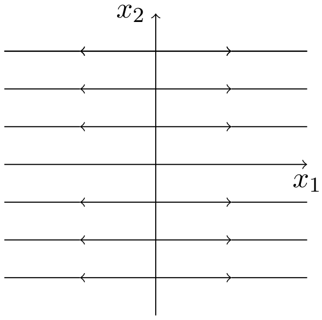
Bem.: Jeder Punkt auf der x_2-Achse ist ein Ruehpunkt.



1e) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; q = 0, p > 0$

- $|x^{(1)}(t)| \to \infty \ (t \to \infty),\ |x^{(2)}(t)| \equiv c$

  $\Rightarrow\ x_* = 0$ **instabil**



Bem.: Jeder Punkt auf der x_2-Achse ist ein Ruhepunkt.

Fall 2: $q = \dfrac{p^2}{4}$

Hier $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$. Es gibt nicht immer zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

2a) Zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v^{(1)}, v^{(2)}$ existieren.

Jede Lösung hat die Form

$$x(t) = (c_1 v^{(1)} + c_2 v^{(2)})e^{\lambda t}.$$

2a-i) $\lambda < 0$: $x_* = 0$ **asymptotisch stabil** (*stabiler Knoten*)

2a-ii) $\lambda > 0$: $x_* = 0$ **instabil** (*instabiler Knoten*)

2a-iii) $\lambda = 0$: $x_* = 0$ **stabil** (triviale Dynamik: jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist kritischer Punkt)

2b) Nur ein linear unabhängiger Eigenvektor v (oBdA mit $|v| = 1$) existiert.

Jede Lösung hat die Form

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t),$$

wobei

$$x^{(1)}(t) = (tv + w)e^{\lambda t}, x^{(2)}(t) = v e^{\lambda t} \text{ und } (A - \lambda I)w = v.$$

Bem.: Für die Bilder wurden gewählt $v = (1,0)^T, w = (0,1)^T$.

2b-i) $\lambda < 0 \;\Leftrightarrow\; p < 0$

- $x^{(1,2)}(t) \to 0 \ (t \to \infty) \;\Rightarrow\; x_* = 0$ attraktiv

* z.z.: $x_* = 0$ ist stabil

  Die Funktion $f(t) := (|w| + t)e^{\lambda t}$ ist stetig, positiv und es gilt $f(0) = |w|, f(t) \to 0 \ (t \to \infty)$.

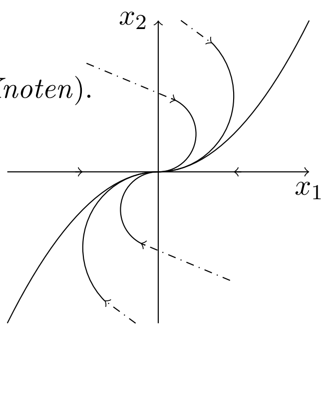
  $\Rightarrow\ f$ hat Maximum in einem $t_* > 0$

  Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta < \varepsilon \min\{1, 1/f(t_*)\}$ gilt

$$|x(t)| \le |c_1| f(t) + |c_2| e^{\lambda t} < \varepsilon \ \forall t \ge 0,$$

  falls $|c_1| + |c_2| < \delta$ (also z.B. falls $|x_0| < \delta$).

Also, $x_* = 0$ ist **asymptotisch stabil** (*stabiler falscher Knoten*).

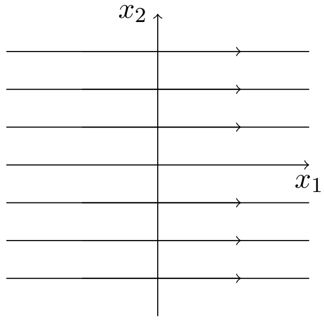


2b-ii) $\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; p = 0$

- $|x^{(1)}(t)| \to \infty \ (t \to \infty), x^{(2)}$ konstant

  $\Rightarrow\;\; x_* = 0$ **instabil**

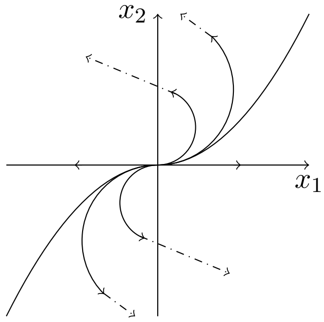
Bem.: Jeder Punkt auf der x_1-Achse ist ein Ruhepunkt.



2b-iii) $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow\; p > 0$

- $|x^{(j)}(t)| \to \infty \ (t \to \infty), j = 1, 2$

  $\Rightarrow\;\; x_* = 0$ **instabil** (*instabiler falscher Knoten*)



$\boxed{\textbf{Fall 3: } q > \frac{p^2}{4}}$

Hier $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Jede Lösung hat die Form

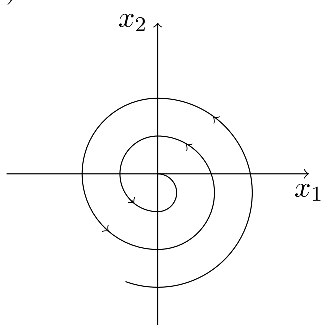
$$x(t) = ce^{\lambda_1 t}v + \overline{c}e^{\overline{\lambda_1}t}\overline{v} = e^{\sigma t}\underbrace{2\mathrm{Re}(ce^{\mathrm{i}\rho t}v)}_{=:\phi(t)}, \text{ wobei } \lambda_1 = \sigma + \mathrm{i}\rho \text{ und } v \in \mathbb{C}^2, c \in \mathbb{C}.$$

$\phi(t)$ ist periodisch. Für $\sigma \neq 0$ wird also das Verhalten der Lösung $x(t)$ für $t \to \infty$ von $e^{\sigma}t$ diktiert.

3a) $\sigma < 0 \;\Leftrightarrow\; p < 0$

- $|x(t)| \leq \max|\phi(t)|e^{\sigma t} \to 0 \ (t \to \infty)$

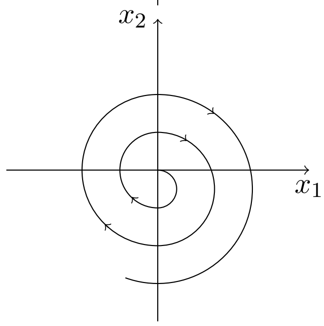
  $\Rightarrow\;\; x_* = 0$ **asymptotisch stabil** (*stabile Spirale*)



3b) $\sigma > 0 \;\Leftrightarrow\; p > 0$

- $|x(t)| \to \infty \ (t \to \infty) \quad$ (falls $x_0 \neq 0$)

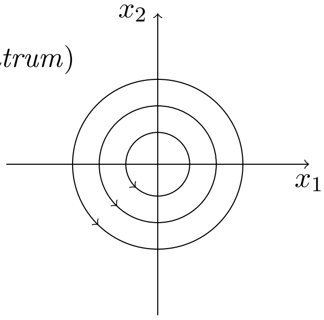
  $\Rightarrow\;\; x_* = 0$ **instabil** (*instabile Spirale*)



3c) $\sigma = 0 \;\Leftrightarrow\; p = 0$

- $x(t) = \phi(t)$ (periodisch) und $\|\phi(\cdot)\|_\infty \to 0$ falls $|x_0| \to 0$

  $\Rightarrow\;$ $x_* = 0$ **stabil aber nicht asymptotisch stabil** (*Zentrum*)



5.2. Lineare autonome Systeme in $\mathbb{R}^n$

Betrachte

$$\dot{x} = Ax \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{5.2}$$

Satz 5.1

1) $x_* = 0$ ist genau dann stabil für (5.2), wenn $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ und falls $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, dann ist λ halbeinfach ($1 < m$-facher Eigenwert mit m linear unabhängigen Eigenvektoren).

2) $x_* = 0$ ist genau dann asymptotischs tabil für (5.2), wenn $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte von A.

Beweis.

1) ($\Rightarrow$) Sei x_* stabil, das heißt, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x(t)| = |e^{tA}x_0| \leq \varepsilon \; \forall t \geq 0$, falls $|x_0| < \delta$, wobei $x(0) = x_0$.
   Zu zeigen:

   $$||e^{tA}|| \leq M < \infty$$

   Dann folgt die Behauptung aus der Form von e^{tA}.
   Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig und $x_0 = \delta(1)\frac{v}{|v|}$. Wir erhalten

   $$|e^{tA}v| = \delta(1)^{-1}|v||e^{tA}x_0| \leq \delta(1)^{-1}|v|$$
   $$\Rightarrow ||e^{tA}|| = \sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|e^{tA}v|}{|v|} \leq \delta(1)^{-1} =: M$$

   ($\Leftarrow$) Es folgt $||e^{tA}|| \leq M < \infty$ aus der Form von e^{tA} (siehe Abschnitt 3.4.2).
   Dann ist

   $$|x(t)| = |e^{tA}x_0| \leq M|x_0|.$$

2) ($\Rightarrow$) Sei $x_* = 0$ asymptotisch stabil. Dann gibt es $\delta_0 > 0$ so, dass

   $$|x(t)| = |e^{tA}x_0| \to 0 \; \forall |x_0| \leq \delta_0.$$

   Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig und $x_0 = \delta_0 \frac{v}{|v|}$.

   $$|e^{tA}v| = \delta_0^{-1}|v||e^{tA}x_0| \to 0 \; (t \to \infty)$$
   $$\Rightarrow \frac{|e^{tA}v|}{|v|} \to 0 \; \forall v \neq 0$$
   $$\Rightarrow ||e^{tA}|| \to 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \text{ für alle Eigenwerte.}$$

   ($\Leftarrow$) Die Rückrichtung ist offensichtlich.

$\square$

5.3. Linearisierte Stabilität von Ruhepunkten

Betrachte

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(x) \\ \text{mit } f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\end{gathered} \tag{5.3}$$

Sei x_* ein Ruhepunkt, das heißt $f(x_*) = 0$.

Ziel: Stabilitätsanalyse der Lösung $x(t) \equiv x_*$
Sei $x(t)$ eine beliebige Lösung und

$$\begin{aligned} u(t) &: = x(t) - x_* \\ \dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt}x_*}_{=0} &= f(x(t)) = f(u(t) + x_*) \\ &\overset{\text{Taylor}}{\underset{\text{in } x_*}{=}} \underbrace{f(x_*)}_{=0} + Df(x_*)u(t) + r(u(t)) \end{aligned}$$

wobei

$$r(u) = |u|\phi(u) \text{ mit } \phi(u) \to 0 \ (u \to 0).$$

Also

$$\dot{u} = Df(x_*)u + r(u) \tag{5.4}$$

ist äquivalent zu (5.3), falls $x = x_* + u$.

- Ein Vorteil von (5.4): Der Ausdruck ist linear bis auf den Term $r(u)$, der klein ist für $|u|$ klein.
- Da u "klein" äquivalent ist zu "x nah an x_*", ist die Stabilität von x_* in (5.3) äquivalent zur Stabilität von $u(t) \equiv 0$ in (5.4).
  Wir zeigen: Die Stabilität von 0 in (5.4) wird teilweise aus der Stabilität von 0 im *linearisierten* System $\dot{u} = Df(x_*)$ abgeleitet.

Satz 5.2 Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), x_*$ ein Ruhepunkt von (5.3) und sei $A := Df(x_*)$. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte von A, dann ist x_* asymptotisch stabil für (5.3).

(ii) $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert von A, dann ist x_* instabil.

Bemerkung. Aus $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte von A kann nichts über die Stabilität von (5.3) gesagt werden (auch wenn alle Eigenwerte halbeinfach sind).

Beweis.

(i) Mit der Variation der Konstanten gilt für $u(t) := x(t) - x_*$

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} r(u(s))ds, \ t \geq 0 \tag{5.3.1}$$

Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |u(t)| \leq \varepsilon \text{ und } \lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \text{ für alle } |u_0| < \delta.$$

Es gilt $\|e^{tA}\| \le Me^{-\omega t}$ für alle $t \ge 0$ mit einem $\omega > 0, M \ge 1$.
Also
$$|u(t)| \le Me^{-\omega t}|u_0| + M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}|r(u(s))|ds \;\forall t \ge 0.$$
Da $r(u) = \varphi(u)|u|$ mit $\lim_{u\to 0}\varphi(u) = 0$, gilt
$$\forall \rho > 0\; \exists \eta > 0: \quad |r(u)| \le \rho|u|,\text{ falls } |u| \le \eta.$$
Sei $\rho_0 > 0$ und $\eta_0 := \eta(\rho_0)$.
$$|u(t)| \le Me^{-\omega t}|u_0| + M\rho_0\int_0^t e^{-\omega(t-s)}|u(s)|ds, \quad \text{falls } |u(s)| \le \eta_0\; \forall s \in [0,t].$$
Für $\psi(t) := e^{\omega t}|u(t)|$ folgt
$$\psi(t) \le M|u_0| + M\rho_0\int_0^t \psi(s)ds.$$
Also, nach der Gronwall-Ungleichung
$$\psi(t) \le M|u_0|e^{M\rho_0 t},$$
das heißt
$$|u(t)| \le M|u_0|e^{(M\rho_0-\omega)t}, \;\text{ solange } |u(s)| \le \eta_0\; \forall s \in [0,t].$$
Wir wählen ρ_0 so, dass $M\rho_0 - \omega < 0$ und δ so, dass $\delta M < \min\{\eta_0, \varepsilon\}$.
Dann folgt
$$|u(t)| \le M|u_0| \le \delta M < \min\{\eta_0,\varepsilon\}, \quad \text{falls } |u_0| < \delta \text{ und } |u(s)| \le \eta_0\; \forall s \in [0,t]. \tag{5.3.2}$$
Es kann also kein $t_* > 0$ geben, sodass $|u(t_*)| = \eta_0$. Deshalb $|u(t)| < \eta_0$ für alle $t > 0$. Aus dem Fortsetzungssatz folgt die globale Existenz nach rechts für $u(t)$.
Gleichung (5.3.2) ist die Stabilität von $u(t) \equiv 0$. Außerdem gilt
$$|u(t)| \le Me^{(M\rho_0-\omega)t}|u_0| \to 0 \quad (t \to \infty),$$
weil $M\rho_0 - \omega < 0$. Insgesamt ist also $u(t) \equiv 0$ (und deswegen $x(t) \equiv x_*$) asymptotisch stabil.

(ii) Siehe Sec. 5.4 in [2]. Die Idee des Beweises ist u_0 aus dem instabilen Unterraum
$$X_* := \operatorname{span}\{v_j : \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0 \text{ und } (\lambda_j, v_j) \text{ ist Eigenpaar von } A\}$$
zu wählen. Für solche u_0 wächst $u(t)$ sogar exponentiell schnell.

□

Beispiel.

1) Mathematisches Pendel
$$\ddot{x} + \omega^2\sin(x) = 0,\; \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
Sei $y_1 := x,\; y_2 := \dot{x}$. Dann ist
$$\dot{y} = f(y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2\sin(y_1)\end{pmatrix}$$
.

- Ruhepunkte werden durch $f(y) = 0$ bestimmt. Das ist äquivalent zu $y_2 = 0,\ y_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  (a) $k = 1$

$$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(\pi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - \omega^2 = 0, \text{ das heißt: } \lambda_{1,2} = \pm\omega$$

  – ein positiver Eigenwert bedingt nach Satz 5.2 die Instabilität von $y \equiv (\pi, 0)$

  (b) $k = 0$

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$$

  Also ist Satz 5.2 hier nicht anwendbar. Im linearisierten System $\dot{u} = Df(0, 0)u$ ist die Lösung $u(t) \equiv (0, 0)$ jedoch stabil, da der Punkt $(0, 0)$ ein Zentrum ist. Wir zeigen in Abschnitt 5.4 mit Hilfe der Ljapunov-Methode, dass $(0, 0)$ auch im nichtlinearen System $\dot{y} = f(y)$ stabil ist.

2)

$$\dot{x} = \underbrace{\beta x^3}_{=:f(x)} \tag{5.4.1}$$

- Ruhepunkt $x = 0$
- $f^{'}(x) = 3\beta x^2,\ f^{'}(0) = 0 \Rightarrow$ Satz 5.2 ist nicht anwendbar.

Problem (5.4.1) sowie die Linearisierung $\dot{u} = f(0)u$ sind jetzt aber explizit lösbar:

1) $\dot{u} = f(0)u = 0 \Rightarrow u_* = 0$ ist stabil.

2) $\dot{x} = \beta x^3$

$$x(t) = \operatorname{sign}(x_0)\sqrt{\frac{-1}{2\beta t - x_0^2}} \qquad \text{(Trennung der Variablen)}$$
$$\Rightarrow \beta < 0: \text{ asymptotische Stabilität}$$
$$\beta > 0: \text{ Instabilität}$$

5.4. Ljapunov-Methode

Betrachte

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x) \\ \text{mit } f : G \to \mathbb{R}^n \text{ lokal lipschitzstetig und } G \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \end{gathered} \tag{5.5}$$

Definition. $V \in C(G, \mathbb{R})$ heißt

(a) *Ljapunov-Funktion (LF)* für (5.5), falls für jede Lösung x von (5.5)

$$\phi(t) := (V \circ x)(t)$$

monoton fällt. (Das heißt, V fällt entlang aller Lösungskurven.)

(b) *strikte Ljapunov-Funktion (SLF)* für (5.5) falls

$$\phi(t) := (V \circ x)(t)$$

streng monoton fallend ist.

Bemerkung.

1) Falls $V \in C^1(G, \mathbb{R})$, dann

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \nabla V(x(t))^T \dot{x}(t) \\ &= \nabla V(x(t))^T f(x(t))\end{aligned}$$

   und V ist eine LF genau dann, wenn

$$\nabla V(x)^T f(x) \leq 0 \; \forall x \in G.$$

2) Jedes erste Integral ist eine LF.

3) Falls $-f(x) = \nabla F(x)$ für ein $F \in C^1(G, \mathbb{R})$, dann ist $V := F$ eine LF:

$$\nabla V^T f = -\nabla F^T \nabla F = -|\nabla F|^2 \leq 0.$$

   Für $n = 1$ hat (5.5) also immer die LF gegeben durch

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} f(s) ds \text{ (mit } x_0 \in G).$$

Beispiel. (Gedämpftes Pendel)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0 \text{ mit } \alpha \geq 0, \omega > 0$$

Als System erster Ordnung:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha y_2 - \omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \text{ mit } y_1 := x, \; y_2 := \dot{x}$$

Die Funktion

$$V(y) : = \frac{1}{2} y_2^2 + \omega^2 (1 - \cos(y_1)$$

ist eine LF, da

$$\begin{aligned}\nabla V(y)^T f(y) &= (\cos^2 \sin(y_1) y_2 + y - 2(-\alpha y_2 - \omega^2 \sin(y_1)) \\ &= -\alpha y_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

Satz 5.3 Sei V eine LF von (5.5) und x_* ein Ruhepunkt.

1) Falls x_* ein striktes lokales Minimum von V ist, dann ist x_* stabil.

2) Falls x_* ein striktes lokales Minimum von V ist, x_* isoliert in $\mathcal{E} := \{x \in G : f(x) = 0\}$ und V eine SLF sind, dann ist x_* asymptotisch stabil.

Beweis.

1) Sei $\varepsilon < 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(x_*)} \subset G$ und $V(x) > V(x_*)\ \forall x \in \overline{B_\varepsilon(x_*)} \setminus \{x_*\}$. Außerdem definieren wir $\eta := \min\limits_{x \in \partial B_\varepsilon(x_*)} V(x)$

   - $V(x_*) < \eta \Rightarrow \exists \delta \in (0, \varepsilon):\ V(x) < \eta\ \forall x \in B_\delta(x_*)$
   - Sei $x_0 \in B_\delta(x_*)$. Dann

     $$V(x(t)) \leq V(x_0) < \eta \text{ (da } V \text{ entlang Lösungskurven fällt)}$$

     solange $x(\cdot)$ existiert.
     Zu zeigen: $x(t)$ erreicht nie $\partial B_\varepsilon(x_*)$. (Dann folgt die globale Existenz und $|x(t) - x_*| < \varepsilon\ \forall t > 0$.)
     Angenommen es existiert $t_*^{'} > 0$, sodass $x(t^{'} \in \delta B_\varepsilon(x_*)$. Dann

     $$V(x(t^{'})) \geq \eta \qquad \text{(Widerspruch)}$$

2) Siehe [2]

□

Beispiel. (Bewegung eines Teilchens mit Masse m im Potentialfeld.)

$$m\ddot{x} = -\nabla\phi(x),\ \ x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{5.6}$$

Dabei ist $x(t)$ die Position.

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= m\ddot{x} = -\nabla\phi(q) \end{aligned}\right\} \text{ 2}n\text{-Gleichungen mit } q := x,\ \ p := m\dot{x}$$

Sei $V(q,p) = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(q)\ \ \left(= m\frac{|\dot{x}|^2}{2} + \phi(x)\right)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(q(t),p(t)) &= \frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left(p(t)^T p(t)\right) + \frac{d}{dt}\phi(q(t)) \\ &= \frac{1}{m}\dot{p}(t)^T p(t) + \nabla\phi(q(t))^T \dot{q}(t) \\ &= \frac{1}{m}(-\nabla\phi(q(t))^T p(t)) + \frac{1}{m}\nabla\phi(q(t))^T p(t) = 0 \end{aligned}$$

Also ist V ein erstes Integral und damit eine LF. Das heißt, strikte Minima von V sind stabile Ruhelagen von (5.6).

Beispiel. (Mathematisches Pendel) Wie wir hier zeigen, kann man mit Hilfe der Ljapunov-Methode die Stabilität der unteren Ruhelage des mathematischen Pendels recht einfach zeigen. Bemerken Sie, dass wir die linearisierte Stabilitätstheorie in diesem Fall nicht anwenden konnten.

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin(x)$$

ist ein Beispiel einer Bewegung im Potentialfeld (mit $m = 1$ und $\phi(x) = -\omega^2\cos(x)$).

$$\begin{aligned} &\phi(x) = -\omega^2\cos(x) \text{ hat ein striktes Minimum in } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow\ &(x,\dot{x}) = (0,0) \text{ ist stabil.} \end{aligned}$$

A. Jordansche Normalform

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass

$$A = TJT^{-1}$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \text{ und } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_k\times s_k} \text{ für alle } k \in \{1,\dots,m\},$$

wobei $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ $(1 \le m \le n)$ die Eigenwerte von A sind - aufgelistet mit ihrer *geometrischen* Vielfachheit.

(i) Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Dann ist die geometrische Vielfachheit von λ gleich der Anzahl der Blöcke J_k mit $\lambda_k = \lambda$. Die algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda)$ des Eigenwertes λ erfüllt

$$m_a(\lambda) = \sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k=\lambda}}^{m} s_k.$$

(ii) Falls λ halb-einfach (geometrische Vielfachheit gleich algebraischer Vielfachheit) ist, dann sind alle Blöcke mit $\lambda_k = \lambda$ skalar.

(iii) Die Spalten von T sind die Hauptvektoren von A, d.h. Lösungen von $(A-\lambda)^k v = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und einen Eigenwert λ von A. Genauer: die Matrix T hat die Form $T = (T_1|T_2|\dots|T_m)$, wobei $T_k \in \mathbb{C}^{n\times s_k}$. Die Spalten von T_k sind die Hauptvektoren $v^{(k,j)}, j = 1\dots,s_k$ zu λ_k, wobei $v^{(k,1)}$ ein Eigenvektor ist. Die Hauptvektoren erfüllen

$$(A-\lambda_k I)v^{(k,j+1)} = v^{(k,j)}, j = 1,\dots,s_k - 1.$$

(iv) **Reelle Jordansche Normalform:** Es existiert eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $A = UJU^{-1}$ mit $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$, wobei

$$J_k = \begin{cases} \lambda_k I_{s_k} + N_k & \text{, falls } \lambda_k \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & R \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} Re\lambda_k & Im\lambda_k \\ -Im\lambda_k & Re\lambda_k \end{pmatrix} & \text{, falls } Im\lambda_k \neq 0. \end{cases}$$

Die Spalten von U sind die Real- und Imaginärteile der Hauptvektoren zu A.

Literatur

[1] W. Boyce, R. DiPrima, and D. Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Wiley, 2017.

[2] J. Prüss and M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme.* Grundstudium Mathematik Series. Springer International Publishing AG, 2019.

[3] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung.* Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013.