Übungsblatt 4

Abgabe: 2.6.2015; wird besprochen: 3.6.2015

Problem 1: Betrachte wieder (cf. Blatt 2) das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) + f(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \alpha < 0\}$, mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und mit $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

Mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion zeige, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|u_0| < \delta$ das AWP genau eine globale Lösung (d.h. für alle $t > 0$) hat. Diesmal schreibe das AWP *nicht* um als eine Integralgleichung, sondern behalte die Differentialgleichungform und untersuche Nullstellen einer passenden Abbildung, die den Ableitungsoperator enthält.

Hinweis: Benutze die Variable $v := u - u_0$ statt u.

Problem 2: Sei X ein Banachraum, $A \subset X$ kompakt, konvex und nicht leer und $f : A \to A$ stetig. Zeige, daß f einen Fixpunkt hat.

Hinweis: Kurz und einfach.

Problem 3: Wir setzen $I := [0, 1]$ und $X := C(I, \mathbb{R})$.

a) Betrachte den Integralkern $K : I^2 \to \mathbb{R}$ mit $K(x, y) := \frac{1}{2}|x - y|$ und den Operator $T : X \to X$ mit $Tu := \int_0^1 K(\cdot, y)u(y)dy$. Zeige, daß für $K(x, y) := \frac{1}{2}|x - y|$ und $u = Tf$ gilt $\partial_x^2 u = f$ in $(0, 1)$.

b) Modifiziere die Funktion $K(x, y)$ aus Teil a) durch eine bilineare Abbildung $l : I^2 \to \mathbb{R}$, so daß $u(x) := \int_0^1 (K(x, y) + l(x, y)) f(y)\, dy$ das folgende homogene Dirichletproblem $(*)$ löst

$$(*) \begin{cases} \partial_x^2 u(x) &= f(x) \quad \text{in } (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

c) Gegeben sei eine stetige (i.A. nichtlineare) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Randwertproblem

$$(**) \begin{cases} \partial_x^2 u(x) &= f(u(x)) \quad \text{in } (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

Zeige: Unter geeigneten Annahmen an f hat das Randwertproblem $(**)$ eine Lösung.

Hinweis: Mit Hilfe des Operators T und des Integralkernes $K + l$ formuliere das Problem als ein Fixpunktproblem um und benutze den Schauder'schen Fixpunktsatz. Die explizite Form von l (und von K) ist in diesem Teil der Aufgabe unwichtig.

Problem 4: Einbettung von Sobolev- in Hölderräume. Es seien $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty)$. Wir definieren

$$W^{1,p}(I,\mathbb{R}) :=$$
$$\left\{ f \in L^p(I,\mathbb{R}) \,|\, \exists\, g \in L^p(I,\mathbb{R}) : \text{für fast alle}\, x_1, x_2 \in I:\ f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \right\}$$

mit der Norm $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p(I)} + \|g\|_{L^p(I)}$.

Bemerkung: Der Raum $\left(W^{1,p}(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{W^{1,p}}\right)$ ist ein Banachraum.

a) Zeige für $\alpha \le 1 - \frac{1}{p}$ die Stetigkeit der Einbettung $j : W^{1,p}(I,\mathbb{R}) \to C^\alpha(I,\mathbb{R})$ mit $j(u) = u$ ($j = id$, aber streng genommen wählt j einen Repräsentanten).

   Hinweis: Die Hölder Ungleichung ist hier hilfreich. Fange erst mit der Abschätzung von $\sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$. *Für* $\|f\|_\infty$ *ist es gut so anzufangen, daß man das Mittelwertintegral:* $|f(x)| = ⨍_I |f(x)|dy$ *und die Dreiecksungleichung verwendet.*

b) Bonusaufgabe (Bonuspunkte)

   Zeige, daß für $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$ die stetige Einbettung $j : W^{1,p}(I,\mathbb{R}) \to C^\alpha(I,\mathbb{R})$ mit $j(u) = u$ sogar kompakt ist.

   Hinweise:

   (i) *Man überlege sich, daß es ausreicht, die Kompaktheit der Einbettung* $\tilde{j} : C^\beta \to C^\alpha$ *mit* $\beta = 1 - \frac{1}{p}$ *zu zeigen.*

   (ii) *Man verwende den Satz von Arzela-Ascoli, um ein Grenzobjekt in* $C(I,\mathbb{R})$ *zu finden. Danach wird gezeigt, daßdie Konvergenz zu diesem Grenzwert auch in* $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ *gilt.*