# KLASSISCHE THEORIE DER PDGl (PDEs)

11.4.16

## Kap. 1) EINFÜHRUNG

allgemeine Form von PDEs: $F(y, u(y), \nabla u(y), D^2 u(y), \dots) = 0$ (1)

$y \in U \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$

- $y$ = unabh. Variablen (z.B. Raum und Zeit, z.B. $y = (\overset{\text{Zeit}}{t}, \overbrace{x_1, \dots, x_{m-1}}^{\text{Raum}})$)
- $u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ abhäng. Variablen (die Unbekannten), $N \in \mathbb{N}$
- $F$ gegebene Fkt

(1) wird oft ergänzt durch Anfangsbedingungen (in $t=0$)
und/oder Randbedingungen (in $x \in \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq m$) → Daten

Spezialfälle von (1):
- skalare PDEs : $N = 1$
- lineare PDEs : $F$ linear in allen Variablen $u, \nabla u, \dots$
- erster Ordnung : $F(y, u(y), \nabla u(y)) = 0$
- gewöhnliche DGl (ODE) : $m = 1$

Anwendungen: Physik, Chemie, Biologie, Ökologie, Finanz, Geometrie, ...

Bsp.
- Chemie – Reaktionen mit Diffusion
- Bio – Diffusion in einer Zelle, Transport d. Signals in Nerven
- Ökol. – Populationswachstum, Epidemie – Ausbreitung
- Finanz. – Wert eines Derivats (Black-Scholes)
- Geom. – Minimalflächen (z.B. Seifenhaut)

In dieser Vorlesung hauptsächlich:

→ allgemeiner $-\nabla \cdot (a(x) \nabla u) = f(x)$

(2) – Poisson-Gl. : $-\Delta u = f(x)$ (falls $f = 0$, dann „Laplace-Gl.")
(3) – Wärmeleitungsgl. : $\partial_t u - \Delta u = f(x,t)$ (allgem. $\partial_t u - \nabla \cdot (a(x) \nabla u) = f$)
(4) – Wellengl. : $\partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t)$

} lineare Glen

– Erhaltungsgleichungen: $\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0$ } nicht-linear falls $f$ NL

Bem: (2), (3), (4) sind Beispiele von drei großen PDE-Klassen

(2) ist elliptisch, da

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u = f \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1$$

beschreibt ein Ellipsoid ($n=2 \Rightarrow$ Ellipse)

(3) ist parabolisch, da

$$\partial_t u - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u = f \quad \rightsquigarrow \quad \tau - \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1$$

ist ein Paraboloid ($n=1 \Rightarrow$ Parabel)

(4) ist hyperbolisch, da

$$\partial_t^2 u - \sum \partial_{x_j}^2 u = f \quad \rightsquigarrow \quad \tau^2 - \sum \xi_j^2 = 1$$

ist ein Hyperboloid ($n=1 \Rightarrow$ Hyperbel)

Seite 1,5

<u>Notation:</u> • Für $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ ist $\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}$ (Gradient)

$$D^2 u := \left(\partial_{x_i}\partial_{x_j} u\right)_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{(die Hessesche)}$$

$$\Delta u := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u \quad \text{(Laplace-Op.)}$$

• Für $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\nabla\cdot u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u_j$ (Divergenz)

• Für $u: \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \\ (x,t) \to u(x,t) \end{cases}$ ist $\nabla_x u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}$ (oft nur $\nabla u$)

• Für $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot} u = \nabla\times u := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix}$

mehr komplizierte PDE-Beispiele:

• <u>Maxwell-Glen</u>

$$(5)\quad \begin{cases} \nabla\times E = -\partial_t B, \quad \nabla\cdot D = \rho, \quad \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\times B = \partial_t D \\ D = E + 4\pi P \qquad (E, B, D, P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}) \end{cases}$$

$E$ = elekt. Feld, $B$ = magn. Flussdichte, $D$ = el. Flussdichte, $P$ = Polarisation

$P = P(E,x)$, d.h. $P$ hängt von $E$ und $x$ ab, $\rho$ = Ladungsdichte

• <u>Navier-Stokes-Glen</u> (Strömung eines Fluides)

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_t v_i + \sum_{j=1}^3 v_j \partial_{x_j} v_i - \Delta_x v_i = -\partial_{x_i} p, \quad i = 1,2,3 \\ \nabla\cdot v = 0 \end{cases}$$

$$(7)\quad v(x,0) = v_0(x) \qquad \text{(AB)}$$

wobei $v: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3 \\ (x,t) \mapsto v(x,t) \end{cases}$ (Geschwindigkeit)

$p: \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (Druck)

(5) & (6): Systeme von PDEs

1 Mio $ Problem

Beweis oder Gegenbeispiel für
$v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \cdot v_0 = 0$ $\Rightarrow$ die Lösung von (6) & (7) erfüllt
$v, p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $\int_{\mathbb{R}^3} |v(x,t)|^2 dx < C$
$\forall t \geq 0$

Ausblick: Kapitel: 2) Laplace & Poisson Gl.
3) Wärmeleitungsgl.
4) Wellengl.
5) Erhaltungsgleichungen

Themen: • explizite Lösungsdarstellung – Eigenfunktion-Methode (Trennung der Variablen) 2) – 4)
– Fundamentallösung, Greensche Fkt: 2) – 4)
– Methode der Charakteristiken: 5)
• Wohlgestelltheit (eindeutige Existenz ~~der~~ Lsg und stetige Abhängigkeit von Daten)
• Lösungseigenschaften: – Maximumsprinzip: 1) & 2)
– Regularität

Literatur: • L.C. Evans, PDE } nur „klassischer Teil" (keine schwache
• B. Schweizer, PDGl (online) } Ableitungen, schwache Lsgen, Sobolevräume usw.)

• Ch. Meyer, PDGl, klassische Methoden, Skript, 2011 (online)
• B. Schweizer, Skalare Erhaltungsglen, Skript, 2015 (online)
• John?

## 1.1 Herleitung der Laplace, Poisson und Wärmeleitungsgl. : Diffusionsprozess

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei

$u: \underset{x}{\Omega} \times \underset{t}{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$ Konzentration eines Stoffes $\left[\frac{mol}{m^3}\right]$

$j: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ Stofffluss pro Fläche und Zeit (Teilchenstromdichte) $[mol/m^2 s]$

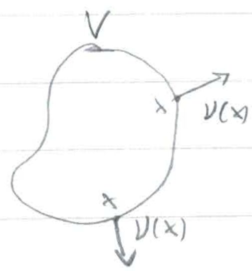
$f: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Stoffzufuhr pro Volumen und Zeit $[mol/m^3 s]$

Bsp: Farbe im Wasser (ohne Strömung)

1) Bilanzgleichung: Sei $V \subset \Omega$ offen, beschr. mit $\partial V$ glatt ($C^1$)
(V heißt „Testvolumen")

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u(x,t)\,dx}_{\text{Änderungsrate der Stoffmenge in } V \text{ zur Zeit } t} = \underbrace{\int_V f(x,t)\,dx}_{\text{Zuflussrate}} - \underbrace{\int_{\partial V} j(x,t)\cdot \nu(x)\,dS}_{\text{Abflussrate}} \quad \text{für } t \in (0,\infty)$$

z.B. (n=2)




Satz von Gauß $\Rightarrow$ $$\int_V \partial_t u(x,t) - f(x,t) + \nabla_x \cdot j(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,\infty)$$

V beliebig $\Rightarrow$ $\partial_t u(x,t) - f(x,t) + \nabla \cdot j(x,t) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$
(bei Stetigkeit für alle $x \in \Omega$)

Also

$$\boxed{\partial_t u + \nabla \cdot j = f} \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

2) konstitutive Beziehung: $j = -a(x)\nabla u$ mit dem Diff.-koeff. $a(x) > 0$ (Ficksche Gesetz)
d.h. Flussrate proportional zum Gradienten der Konzentration

Dann $\partial_t u - \nabla\cdot(a\nabla u) = f$ (8) (Diffusionsgl.)

<u>Bem:</u> in homogenen Medien ist $a = \text{konst.}$ und $\nabla\cdot(a\nabla u) = a\nabla\cdot\nabla u$
$= a\Delta u$

<u>(8) als Wärmeleitungsgl.:</u>

$T$ = Temperatur $[K]$

$q$ = Wärmeflussdichte $\left[\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}\right]$

$f$ = Wärmezufuhr $\left[\frac{J}{m^3 s} = \frac{W}{m^3}\right]$

Fourier-Gesetz:

$q = -k(x)\nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit $k(x) > 0$

$\Rightarrow \partial_t T - \nabla\cdot(k\nabla T) = f$ (Wärmeleitungsgl.)

<u>Zeit-unabh. Lsgen von (8) für $f = f(x)$ (d.h. $f$ unabh. von $t$)</u>

– stationäre Verteilung der Dichte / der Temperatur

↳ $u(x)$ erfüllt

(9) $-\nabla\cdot(a\nabla u) = f$ (Poissongl.)

<u>Physikalisch relevante RB für (8), (9)</u>

Sei (8) bzw (9) definiert für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr.

a) <u>Dirichlet RB</u>

$u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$

– z.B. feste Temperatur / Konzentration am Rand

b) <u>Neumann RB</u>

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$ (Normalenableitung Null)

– z.B. • kein Wärmefluss durch $\partial\Omega$ (perfekte Isolation) $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu\cdot\nabla u\right)$

• kein Stofffluss — " — (Behälter-Wand)

c) Robin RB

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \alpha\, u(x) = 0 \quad , x \in \partial\Omega \qquad (\alpha \geq 0)$$

$\hat{=}$ Wärmefluss durch $\partial\Omega$ proportional zur Temperatur (realistische Beschreibung für kleine Temperaturen)

## 1.2 Fourier-Reihe (kurze Darstellung)

Def: Sei $L>0$ und $f \in L^1([0,L],\mathbb{R})$, d.h. $\int_0^L |f(x)|\,dx < \infty$.
Die Reihe

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right) \tag{10}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)dx, \quad k\in\mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)dx, \quad k\in\mathbb{N} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

heißt eine Fourier-Reihe (Fourier-Entwicklung) von $f$.

Bem: 1) $a_k, b_k$ sind wohl-definiert, da $\int_0^L |f(x)\,\varphi(k\frac{2\pi}{L}x)|\,dx < \int_0^L |f(x)|\,dx < \infty$
mit $\varphi(y) = \sin(y)$ und $\cos(y)$.

2) Motivation zur Wahl von $a_k, b_k$:
Falls $f(x) = s(x)$, dann multipliziere $f = s$ mit $\cos(k\frac{2\pi}{L}x)$ oder $\sin(k\frac{2\pi}{L}x)$ und integriere $\int_0^L$.

Weil

$$\int_0^L \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}\delta_{jk} & , (j,k) \neq (0,0) \\ L & , (j,k) = (0,0) \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_0^L \sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}\delta_{jk} & \forall\, j,k\in\mathbb{N} \\ 0 & , j=0 \vee k=0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\int_0^L \sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx = 0 \qquad \forall\, j,k\in\mathbb{N}_0, \tag{14}$$

erhalte (11).

Sei $S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k \frac{2\pi}{L} x) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{L} x)$.

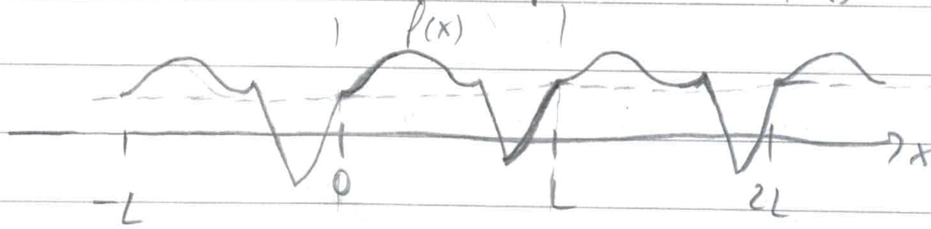
**Satz 1.1** (i) Sei $f \in L^2((0,L), \mathbb{R})$. Dann
$$\| f - S_n \|_{L^2(0,L)} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$
(ii) Sei $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $L$-periodisch und stückweise stetig diffbar ($C^1$).
Dann konvergiert $S_n$ absolut und gleichm. gegen $f$ auf $\mathbb{R}$, also
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Bew: [Forster, Analysis 1, §23].

Bem: $\{\cos(k \frac{2\pi}{L} x), k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(k \frac{2\pi}{L} x), k \in \mathbb{N}\}$ ist eine (wegen (12) + (14)) orthog. Basis des unendlich dim. Raumes $L^2((0,L), \mathbb{R})$.

**Korollar 1.2** Sei $f \in C([0,L], \mathbb{R})$ stückweise $C^1$ mit $f(0) = f(L)$.
Dann $S_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} f$ auf $[0,L]$.

Bew: $f$ kann fortgesetzt werden zur $L$-period. Fkt $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die stückweise $C^1$ ist. $(f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in [0,L])$

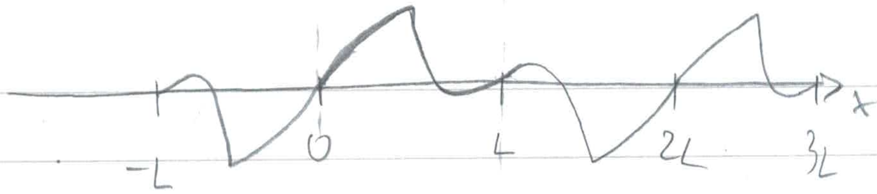



■

**Korollar 1.3** Sei $f \in C([0,L], \mathbb{R})$ stückw. $C^1$ und $f(0) = f(L) = 0$.
Dann konvergiert $\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(k \frac{\pi}{L} x)$, $b_k := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k \frac{\pi}{L} x) dx$

absolut und gleichm. gegen $f$ auf $[0,L]$.

Bew: $f$ kann fortgesetzt werden zur ungeraden stückw. $C^1$ und $2L$-period. Fkt $\tilde{f}$




- $\tilde{f}$ ist $2L$-period. $\Rightarrow$ Fourier-Reihe mit $L$ ersetzt durch $2L$ anwendbar
- $\tilde{f}$ ungerade ($\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)\ \forall x$) $\Rightarrow$ kein cos-Terme in der Reihe ($a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$)
- $b_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \overbrace{f(x) \sin(k \frac{\pi}{L} x)}^{\text{gerade}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k \frac{\pi}{L} x) dx$ da beide $f$ & sin ungerade ■

<u>Korollar 1.4</u>: Sei $f \in C([0,L], \mathbb{R})$ stückweise $C^1$. Dann konvergiert $\frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos(k \frac{\pi}{L} x)$ glchm. und absolut gegen $f$, wobei $a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k \frac{\pi}{L} x) dx$.

Bew: Übung.

## Mehr-dimensionale Four.-Reihen

2D: analoges Resultat zu S.1 für $f: [0, L_1] \times [0, L_2] \to \mathbb{R}$ mit $L_1, L_2 > 0$ und mit der Fourier-Basis

$$\left\{ \sin\left(\frac{k_1 2\pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{k_2 2\pi}{L_2} x_2\right), k_1, k_2 \in \mathbb{N} \right\}$$
$$\cup \left\{ \sin\left(\frac{k_1 2\pi}{L_1} x_1\right) \cos\left(\frac{k_2 2\pi}{L_2} x_2\right), k_1 \in \mathbb{N}, k_2 \in \mathbb{N}_0 \right\}$$
$$\cup \left\{ \cos(\quad) \sin(\quad), k_1 \in \mathbb{N}_0, k_2 \in \mathbb{N} \right\}$$
$$\cup \left\{ \cos(\quad) \cos(\quad), k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

(ähnlich für höhere Dimensionen)

<u>z.B. (n=2)</u>: Falls $f \in C^1(\prod_{j=1}^{2} (0, L_j), \mathbb{R})$ und $f(x) = 0 \quad \forall x \in \partial(\prod_{j=1}^{2} (0, L_j))$, dann konv.

$$\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}} b_{k_1, k_2} \sin\left(k_1 \frac{\pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(k_2 \frac{\pi}{L_2} x_2\right)$$

glchm. gegen $f$ auf $[0, L_1] \times [0, L_2]$, wobei

$$b_{k_1, k_2} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x) \sin\left(k_1 \frac{\pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(k_2 \frac{\pi}{2} x_2\right).$$

[Pinsky, Linear PDEs and Fourier Theory]

# Kapitel 2: Poissongleichung (& Laplacegl.)

## 2.1. Separation der Variablen; Eigenfunktion-Entwicklung

- Lösung in der Form einer Entwicklung in Eigenfunktionen des Problems (typischerweise: Fourier-Reihe)
- liefert explizite Darstellung für einfache Gebiete (Quader, Ball, ... in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$)
- anwendbar auch für andere Glen (Wärmeleitung, Wellengl., ...)

Betrachte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes beschr. Gebiet (nichtleer, zusammenhängend)

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= h(x), & x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Lösung-Schema:

I) Poisson-Gl. mit homogenen RB $(h=0)$: Eigenfunktion-Entwicklung

1) Eigenwert-Problem

$$-\Delta w(x) = \lambda\, w(x), \quad x \in \Omega$$
$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$\hookrightarrow$ Eigenpaare $(\lambda_k, w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (berechnet durch Separationsansatz wenn möglich)

2) Entwicklung von $f$ in $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\, w_k(x) \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}$$

3) Entwicklung der Lsg $u_0$ in $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$u_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\, w_k(x)$$

- Berechnung von $c_k$:

$$-\Delta u_0 = -\Delta\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k w_k\Big) \overset{\text{formal}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(-\Delta w_k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \lambda_k w_k \overset{!}{=} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k w_k$$

$\Rightarrow \quad c_k = a_k / \lambda_k$

II) „Dirichlet-Problem" für die Laplace Gl. : $\quad -\Delta u_1(x) = 0 \;,\; x \in \Omega$
$\qquad u_1(x) = h(x) \;,\; x \in \partial\Omega$

↳ Separation der Variablen (für spezielle $\Omega$)

III) Volles Problem (15)

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) \;, \quad \text{wobei} \quad -\Delta u_1(x) = 0 \;,\; x \in \Omega$$
$$u_1(x) = h(x) \;,\; x \in \partial\Omega$$

$$\left( \text{weil} \quad \begin{array}{ll} -\Delta u = -\Delta(u_0 + u_1) = f + 0 \;, & x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) + u_1(x) = 0 + h(x) \;, & x \in \partial\Omega \end{array} \right)$$

Bem: Für Neumann RB $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = h(x),\; x \in \partial\Omega$ analog. z.B. E-W-Problem:

$$-\Delta w = \lambda w \;,\; x \in \Omega$$
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \;,\; x \in \partial\Omega \,.$$

Bsp 2.1 ($n=2$, homogene Dirichlet RB):

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = f(x) \;, & x \in \Omega := (0,L)^2 \\ u(x) = 0 \;, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \quad (16)$$

1) Eigenwert-Problem

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u \;, & x \in \Omega \\ u = 0 \;, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \quad (17)$$

Separationsansatz: $\quad u(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2) \quad$ mit $\varphi(0) = \varphi(L) = 0,\; \psi(0) = \psi(L) = 0$

$$\Rightarrow -\Delta u(x) = -\varphi''(x_1)\psi(x_2) - \varphi(x_1)\psi''(x_2) = \lambda\,\varphi(x_1)\psi(x_2)$$

$$-\frac{\varphi''}{\varphi}(x_1) - \frac{\psi''}{\psi}(x_2) = \lambda$$

$$-\frac{\varphi''}{\varphi}(x_1) - \lambda = \frac{\psi''}{\psi}(x_2)$$

- rechte Seite unabh. von $x_1$ $\Rightarrow$ linke Seite konstant $(= \mu \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \; -\frac{\varphi''}{\varphi}(x_1) = \lambda + \mu =: \nu^{(1)} \\ -\frac{\psi''}{\psi}(x_2) = -\mu =: \nu^{(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \nu^{(1)} + \nu^{(2)}$$

$\Rightarrow$ Zwei E-W-Probleme

$$-\varphi''(x_1) = \nu^{(1)}\varphi(x_1) \;, \quad x_1 \in (0,L)$$
$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

$$-\psi''(x_2) = \nu^{(2)}\psi(x_2) \;, \quad x_2 \in (0,L)$$
$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$\Rightarrow$ zu lösen ist das Sturm-Liouville E-wert Problem (ODE-RWP)

$$\left.\begin{aligned} -\xi''(y) &= \nu\,\xi(y), \quad y \in (0,L) \\ \xi(0) &= \xi(L) = 0 \end{aligned}\right\} (18)$$

Charakter. Gleichung: $-r^2 = \nu \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\nu}$

$$\Rightarrow \xi(y) = c_1 e^{\sqrt{-\nu}\,y} + c_2 e^{-\sqrt{-\nu}\,y}$$

- falls $\nu \leq 0$, dann $\xi(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$

$$\xi(L) = c_1 e^{\sqrt{-\nu}\,L} + c_2 e^{-\sqrt{-\nu}\,L} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \quad \text{(nur triviale Lsg)}$$

$\Rightarrow \nu > 0$ und $\xi(y) = c_1 \cos(\sqrt{\nu}\,y) + c_2 \sin(\sqrt{\nu}\,y)$

$$\xi(0) = c_1 \overset{!}{=} 0$$

$$\xi(L) = c_2 \sin(\sqrt{\nu}\,L) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{\nu}\,L = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \nu = \nu_n := \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{N}$$

Eigenpaare von (18): $\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Eigenpaare von (17): $\left(\lambda_{n,m}, w_{n,m}(x)\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$

wobei $\lambda_{n,m} = \frac{(n^2+m^2)\pi^2}{L^2}$, $w_{n,m}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right)$

2) Entwicklung von $f$

$$f(x) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{n,m}\, w_{n,m}(x)$$

$$a_{n,m} = \frac{4}{L^2}\int_0^L\int_0^L f(x_1,x_2)\, w_{n,m}(x)\,dx$$

↳ 2-dim. Sin-Reihe

- konvergiert gleichmäßig z.B. falls $f(x) = 0\ \forall x \in \partial([0,L]^2)$ und $f \in C^1([0,L]^2, \mathbb{R})$

3) Lösung von (16)

$$u(x) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m}\, w_{n,m}(x)$$

$$-\Delta u \overset{\text{(formal)}}{=} \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m}(-\Delta w_{n,m}) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m}\lambda_{n,m} w_{n,m} \tag{19}$$

$$\overset{!}{=} f(x) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{n,m} w_{n,m}$$

$\Rightarrow$ wähle $\quad c_{n,m} = \dfrac{a_{n,m}}{\lambda_{n,m}} = \dfrac{a_{n,m} L^2}{(m^2+n^2)\pi^2}$

Also formal
$$u(x) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{a_{n,m} L^2}{(m^2+n^2)\pi^2} w_{n,m}(x) \tag{20}$$

Rechtfertigung

- Im welchen Sinne ist $u$ eine Lsg von (16)?
- formalen Schritt (19) rigoros machen

Def: $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ heißt eine klassische Lsg von (16), falls $u\in C^2(\Omega,\mathbb{R})\cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ und $-\Delta u(x) = f(x)\ \forall x\in\Omega$, $u(x)=0\ \forall x\in\partial\Omega$.

Satz 2.1. Falls $f\in C^1((0,L)^2)$ und $f(x)=0\ \ \forall x\in\partial(0,L)^2$, dann ist (20) eine klass. Lsg von (16).

Bem: Eindeutigkeit von $u$ wird später gezeigt

Bew: $\sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{n,m} w_{n,m}(x)$ konv. glchm. gegen $f(x)$ und $\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}| < \infty$

(cf. § 1.2)

$\overset{\text{Weierstrass Majorantenkrit.}}{\Longrightarrow}$ (20) konvergiert glchm. und absolut

Sei $\quad S_{NM}(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{a_{n,m} L^2}{(n^2+m^2)\pi^2} w_{n,m}(x)$

i) $S_{NM} \in C(\bar{\Omega}) \underset{\substack{\text{glm.}\\ \text{Konvergenz}}}{\Longrightarrow} u \in C(\bar{\Omega})$

ii) z.z. $u \in C^2(\Omega)$

$$\left.\begin{aligned}
&(a) \quad \partial_{x_1}^2 S_{NM}(x) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} a_{nm} \frac{n^2}{m^2+n^2} W_{n,m}(x) \\
&(b) \quad \partial_{x_2}^2 S_{NM}(x) = \sum \sum a_{n,m} \frac{m^2}{m^2+n^2} W_{n,m}(x) \\
&(c) \quad \partial_{x_1}\partial_{x_2} S_{NM}(x) = \sum \sum a_{n,m} \frac{nm}{m^2+n^2} W_{n,m}(x)
\end{aligned}\right\} \text{alle stetig}$$

z.z. glm. Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| a_{nm} \frac{n^2}{m^2+n^2} W_{n,m}(x) \right| \leq \sum_{n} \sum_{m} |a_{n,m} W_{n,m}(x)|$$

$$\leq \sum_{n} \sum_{m} |a_{n,m}| < \infty$$

$\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ glm. Konvergenz in (a) $\Rightarrow S(x) := \sum_{n,m \in \mathbb{N}} a_{n,m} \frac{n^2}{m^2+n^2} W_{n,m}(x)$ ist stetig und $\partial_{x_1}^2 u = S(x)$. (analog für $\partial_{x_2}^2 u$, $\partial_{x_1}\partial_{x_2} u$)

iii) Gleichung

per Konstruktion: $-\Delta u = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} a_{n,m} \underbrace{\frac{n^2+m^2}{m^2+n^2}}_{=1} W_{n,m} = f$

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

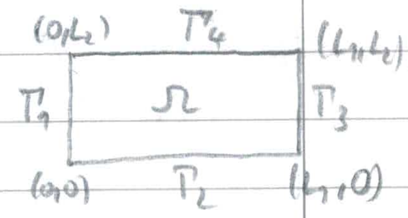
$\blacksquare$

**Bsp 2.2: Dirichlet-Problem für die Laplace-Gl. auf dem Rechteck** (cf. II)

Betrachte

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 \quad , \quad x \in \Omega := (0,L_1)\times(0,L_2) \\ u(x) &= h(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

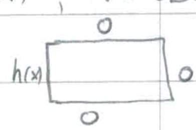
mit $h \in C(\partial\Omega,\mathbb{R})$ stückw. $C^1$




**Idee:** Zerlege das Problem: $u = u_1 + \dots + u_4$

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u_j(x) &= 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u_j(x) &= \chi_{\Gamma_j}(x)\, h(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

z.B.: RB für $u_1$:




**Problem:** RB für die Teilprobleme ($j=1,\dots,4$) nicht stetig, falls

$h(x) \neq 0$ für ein $x \in \{(0,0),(L_1,0),(L_1,L_2),(0,L_2)\} =: E$ (die Ecken)

↳ dann keine klassische Lsg $u_j$ möglich

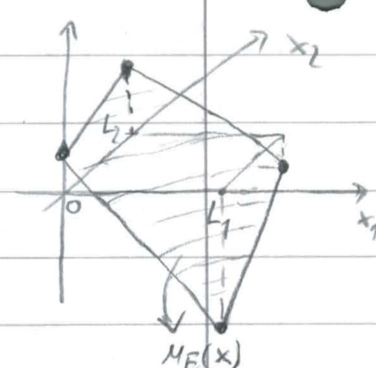
**Ausweg:** bilineare „Eckenfunktion" abziehen: $u_E(x) := a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$

mit $u_E(x) = u(x) \quad \forall x \in E \qquad (*)$

$u_E(0,0) = a \overset{!}{=} h(0,0)$
$u_E(L_1,0) = a + bL_1 \overset{!}{=} h(L_1,0)$
$u_E(0,L_2) = a + cL_2 \overset{!}{=} h(0,L_2)$
$u_E(L_1,L_2) = a + bL_1 + cL_2 + dL_1L_2 \overset{!}{=} h(L_1,L_2)$

$(*)$ ist ein System von 4 lin. Gl-en für $a,b,c,d$

$\Rightarrow a,b,c,d$ eindeutig bestimmt

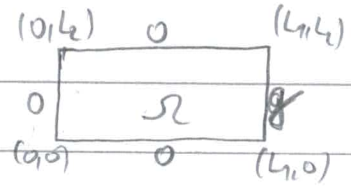



- offenbar: $\Delta u_E = 0$
- sei $v := u - u_E$

$$\Rightarrow \quad \Delta v(x) = 0 \quad , \quad x \in \Omega$$
$$v(x) = h(x) - u_E(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega$$
$$= 0 \quad \forall x \in E$$

Wende Zerlegung (22) an $v$ an

$\Rightarrow$ jedes Teilproblem hat stetige RB, die in den Ecken verschwinden!




OBdA betrachte

$$(23)\quad \begin{cases} \Delta V(x) = 0 \quad , x \in \Omega \\ V(0,x_2) = V(x_1,0) = V(x_1,L_2) = 0 \quad , V(L_1,x_2) = g(x_2) \quad \forall x_1 \in [0,L_1] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2 \in [0,L_2] \end{cases}$$

wobei $g \in C([0,L_2],\mathbb{R})$ stückw. $C^1$ mit $g(0) = g(L_2) = 0$.

Separationsansatz: $V(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2)$

$$\Delta V = \varphi''\psi + \varphi\psi'' = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi} = \mu \quad (\text{Konstante})$$

$$\Rightarrow \quad -\varphi'' - \mu\varphi = 0 \qquad (24)$$

$$-\psi'' + \mu\psi = 0 \qquad (25)$$

RB: $\varphi(0) = 0 \qquad (24_{RB})$

$\psi(0) = \psi(L_2) = 0 \qquad (25_{RB})$

- (25) & $(25_{RB})$ ist ein E-W-Problem mit Lösungen

$$(\mu_n, \psi_n) = \left(-\frac{n^2\pi^2}{L_2^2}, \sin\left(n\frac{\pi}{L_2}x_2\right)\right) \quad , n \in \mathbb{N}$$

- Gl. (24) & $(24_{RB})$ mit $\mu = \mu_n$

$$\varphi_n''(x_1) = \frac{n^2\pi^2}{L_2^2}\varphi_n(x_1) \quad , \quad \varphi_n(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x_1) = c_n \sinh\left(n\frac{\pi}{L_2}x_1\right) \quad , c_n \in \mathbb{R}$$

Insgesamt: $$V(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}x_1\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L_2}x_2\right) \qquad (26)$$

- bleibt zu erfüllen: $V(L_1,x_2) = g(x_2)$

d.h. $\sum_n c_n \sinh\left(\frac{n\pi L_1}{L_2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L_2}x_2\right) \stackrel{!}{=} g(x_2)$

(Entwicklung von $g$ in EFkt des $x_2$-Problems)

↳ sin-Reihe konvergiert glm. nach Koroll. 1.3, falls

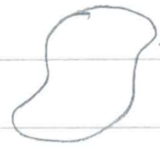
$$(27)\quad c_n = \frac{2}{L_2\sinh\left(\frac{n\pi L_1}{L_2}\right)}\int_0^{L_2} g(y)\sin\left(n\frac{\pi}{L_2}y\right)dy$$

Also (26) mit (27) ist eine klass. Lsg von (23).

Bem: Separation der Variablen anwendbar auch für

- andere RB: • Neumann ⇒ cos-Reihe-Darstellung { Eigenpaare von $-\varphi''(y) = \mu\varphi$, $y \in (0,L)$, $\varphi'(0)=\varphi'(L)=0$ sind $(\mu_n, \varphi_n) = \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \cos(n\frac{\pi}{L}y)\right)$
  • periodisch ⇒ Volle Four.-Reihe-Darstellung
- andere Gebiete: • Kreisscheibe (2D) → cf. Blatt 2
  • Quader, Kugel, Zylinder (3D)
- andere Gl-en: Wärmeleit., Wellengl., ...

NICHT anwendbar für allgemeine Gebiete $\Omega$



$\Omega$

## 2.2. Fundamentallösung, Greensche-Funktion

Ziel: Integraldarstellung der Lsg von (15) mit Hilfe der Greenschen-Fkt

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} h(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, dS(y) + \int_{\Omega} f(y)\, G(x,y)\, dy.$$

$$\begin{pmatrix} dy = d\mathcal{L}^n(y) & , \mathcal{L}^n = \text{Lebesgue-Maß in } \mathbb{R}^n \\ dS(y) = d\mathcal{H}^{n-1}(y), & \mathcal{H}^{n-1} = (n-1)\text{-dim. Hausdorff-Maß} \end{pmatrix}$$

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Fkt. $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch in $\Omega$, falls gilt

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Bsp: $\Omega = \mathbb{R}$: $u(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$\Omega = \mathbb{R}^2$: $u(x) = x_1^2 - x_2^2$

$u(x) = e^{x_1} \cos(x_2)$

Lemma 2.2 (radial symmetrische harmon. Fkt in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

Sei $\varphi \in C^2((0,\infty), \mathbb{R})$ und

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(|x|) \end{cases}, \text{ wobei } |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} := r.$$

$u$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ g.d.w. $\varphi(r) = \begin{cases} a + br, & n = 1 \\ a + b\ln(r), & n = 2 \\ a + b r^{2-n}, & n > 2. \end{cases}$

Bew: 1) Beh.: $\Delta u = \varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi'$

Bew: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi'(r)\frac{x_i}{r}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$

$$\Rightarrow \Delta u = \varphi''(r)\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{1}{r}\varphi'(r)\left(n - \frac{1}{r^2}\sum x_i^2\right)$$

$$= \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) \qquad \blacksquare$$

2) $\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = 0 \;\; \forall r \in (0,\infty) \Leftrightarrow r^{1-n}(r^{n-1}\varphi')' = 0$

$\Leftrightarrow r^{n-1}\varphi' = c = \text{konst.} \Leftrightarrow \varphi'(r) = c\, r^{1-n}$

<u>Def</u>: Die Fkt. $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) &, n=2 \\ \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|} |x|^{2-n} &, n \geq 3 \end{cases}$$

heißt die <u>Fundamentallösung</u> der Laplace-Gl. (oder auch das <u>Newton-Potential</u>)

<u>Notation</u>: $B_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < R\}$ = offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ zentriert in $x$ mit Radius $R$

$S^{n-1} := \partial B_1(0)$ = Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$

$|S^{n-1}|$ = Flächeninhalt von $S^{n-1}$

<u>Bem</u>: Es gilt $|S^{n-1}| = n \cdot \mathrm{Vol}(B_1(0))$ (Üb.-Blatt 2/3)

<u>Lemma 2.3</u> Für jedes $R>0$ gilt

$$\int_{B_R(0)} |\Phi(x)| \, dx < \infty, \quad \int_{B_R(0)} |\nabla \Phi(x)| \, dx < \infty.$$

Av Beachte $\int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(x)| \, dx \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$.

<u>Bew</u>: $\int_{B_R(0)} |\Phi(x)| \, dx = \begin{cases} c\int_0^R \ln(r)\, r \, dr < \infty \\ c \int_0^R r^{2-n} r^{n-1} dr = c \int_0^R r \, dr < \infty \end{cases}$

Für $R \to 0$ verschwinden die Integrale.

$$\int_{B_R(0)} |\nabla \Phi(x)| \, dx \leq c \int_0^R r^{1-n} r^{n-1} dr = cR < \infty \qquad \blacksquare$$

<u>Lemma 2.4</u> Es gilt $\int_{\partial B_R(0)} -\nabla \Phi(x) \cdot \nu(x) \, dS(x) = 1 \quad \forall R>0$

<u>Bew</u>: 1) $\partial_r \Phi(r) \overset{(|S^1|=2\pi)}{=} -\frac{1}{|S^{n-1}|} r^{1-n} = -\frac{1}{|\partial B_r(0)|}$

$$\Rightarrow \nabla \Phi(x) = \partial_r \Phi(|x|) \frac{x}{|x|} = -\frac{1}{|\partial B_{|x|}(0)|} \frac{x}{|x|}$$

$$= -\frac{1}{|\partial B_R(0)|} \frac{x}{R} = -\frac{1}{|\partial B_R(0)|} \nu(x) \qquad \forall x \in \partial B_R(0)$$

weil $\nu(x) = \frac{x}{R}$

2) $$\int_{\partial B_R(0)} -\nabla \Phi(x) \cdot \nu(x)\, dS(x) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|\partial B_R(0)|} \underbrace{\nu(x)\cdot\nu(x)}_{=1}\, dS(x) = 1$$ ∎

Notation: $f \in C_c^k(\Omega)$ heißt $f \in C^k(\Omega)$ und $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ ist eine kompakte Menge.

$f \in C_c(\Omega)$: „$f$ hat kompakten Träger"

Satz 2.5 Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$.
Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bem: (i) Es reicht auch $f \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ [Gilbarg, Trudinger]
(ii) Theorie für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ später (PDE 2)
(iii) $\boxed{\text{Seite } 19{,}5}$

Bew: Sei $B_R(0) \supset \operatorname{supp} f$.

I) z.z. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ (mit Hilfe der domin. Konvergenz von Lebesgue).

Bem: $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\tilde{y}) f(x-\tilde{y})\, d\tilde{y}$ durch $\tilde{y} := x-y$.

1) Stetigkeit: Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$

(i) $\Phi(y) f(x_k - y) \to \Phi(y) f(x_0 - y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(ii) $|\Phi(y) f(x_k - y)| \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}_{<\infty, \text{ da } f \in C_c^2} |\Phi(y)|\, \chi_{B_{2R}(x_0)}(y)$ für $k$ groß genug

weil $f(x_k - y) \neq 0$ nur falls $|y - x_k| \leq R$ und dann
$|y - x_0| \leq |y - x_k| + |x_k - x_0| \leq 2R$ für $k$ groß, da $x_k \to x_0$.

Majorante: $\|f\|_{L^\infty} |\Phi(\cdot)|\, \chi_{B_{2R}(x_0)}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(i), (ii) $\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x_k - y)\, dy}_{= u(x_k)} \to \underbrace{\int \Phi(y) f(x_0 - y)\, dy}_{= u(x_0)}$ $(k \to \infty)$ ✓

Bem (iii): Die Rechnung

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\Delta \Phi)(x-y)}_{=0 \text{ f.ü.}} f(y)\, dy = 0$$

ist falsch!!

$|\Delta \Phi(x)| \sim |x|^{-n}$, d.h. nicht integrierbar in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Differenzieren unter Integral nicht erlaubt!

2) $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$: Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\frac{u(x+te_i)-u(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(y) \frac{f(x+te_i-y)-f(x-y)}{t}}_{\to \Phi(y)\, \partial_{x_i} f(x-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} dy$$

$$\Big|\Phi(y) \underbrace{\frac{f(x+te_i-y)-f(x-y)}{t}}_{|\,| \le \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \text{ wegen Mittelwertsatz}}\Big| \le \underbrace{|\Phi(y)|\, \chi_{B_{2R}(x)}(y)\, \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } t \text{ klein genug}$$

$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ $$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x+te_i-y)-f(x-y)}{t} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \partial_{x_i} f(x-y)\, dy$$

$\parallel$

$\partial_{x_i} u(x)$

und $\Phi(\cdot)\, \partial_{x_i} f(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Wie in 1) zeigt man $\partial_{x_i} u \in C(\mathbb{R}^n)$.

analog: $\Phi(\cdot)\, \partial^2_{x_i x_j} f(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^2_{x_i x_j} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \partial^2_{x_i x_j} f(x-y)\, dy$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

2) z.z. $-\Delta u = f$

$$\Delta u(x) = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy}_{=: I_1^\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy}_{=: I_2^\varepsilon}$$

$I_1^\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, da $f \in C^2$ und $\int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| \to 0$ (L. 2.3)

$$I_2^\varepsilon \overset{\text{Green}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \underbrace{\Delta \Phi(y)}_{=0} f(x-y)\, dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\, \nabla f(x-y) \cdot \nu_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}(y)\, dS(y)$$

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, \nabla \Phi(y) \cdot \nu_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}(y)\, dS(y)$$

$$\underset{\left(\nu_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}(y) = -\frac{1}{\varepsilon} y\right)}{=} -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\, \nabla f(x-y) \cdot y\, dS(y) + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, \nabla \Phi(y) \cdot \nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\, dS(y)$$

$$=: I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon$$

$$|I_3^\varepsilon| \overset{|y|=\varepsilon}{\leq} \Phi(\varepsilon)\, \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}\, |\partial B_\varepsilon(0)| \leq C\varepsilon^{n-1}\Phi(\varepsilon) \leq \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon|, & n=2 \\ C\varepsilon, & n\geq 3\end{cases}$$

$$\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

$$I_4^\varepsilon = -f(x)\underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)} -\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\,dS(y)}_{=1 \quad (L.2.4)}$$

$$+\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{-\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)}_{=\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(0)|}|\nu|^2>0}\ \underbrace{(f(x)-f(x-y))}_{|\ldots|\leq C\varepsilon,\ \text{da } f\in C_c^1\ (\text{Mittelwertsatz})}\,dS(y)$$

$$=: -f(x) + I_5^\varepsilon$$

$$|I_5^\varepsilon| \leq C\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon(0)} -\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\,dy \overset{L.2.4}{=} C\varepsilon \to 0$$

Insgesamt: $\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(I_1^\varepsilon + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon) = -f(x)$ ∎

## Interpretation von $\Phi$ als Distributionslsg

Wir zeigen: „$\Phi$ erfüllt $-\Delta\Phi = \delta_0$ im Distributionssinn"

Notation: Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen ($\Omega=\mathbb{R}^n$ möglich).

$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ („Testfunktionen")

Konvergenz in $\mathcal{D}$: $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, falls $\exists K\subset\Omega$ kompakt, s.d.

(i) $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) $\partial^\alpha\varphi_j \to \partial^\alpha\varphi$ glchm. auf $K \quad \forall \alpha\in\mathbb{N}_0^n$.

Def (Distribution)

Eine Distribution ist eine lin. stetige Abb. $T: \mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{R}$, d.h.

$$\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi \quad \Rightarrow \quad T(\varphi_j) \to T(\varphi).$$

$D'(\Omega)$ = Menge aller Distributionen

Bem: $D'$ ist der topolog. Dualraum zu $D$.

Bsp: 1) Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (d.h. $\int_K |f(x)|\,dx < \infty$ $\forall K \subset \Omega$ kompakt)

$$T_f : \begin{cases} D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \end{cases} \Bigg\}$$ ist eine Distrib., weil

(i) $T_f$ ist linear

(ii) sei $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ und $K \subset \Omega$ kpkt mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ $\forall n$.

Es gilt $\int_\Omega \varphi_n f \to \int_\Omega \varphi f$ nach Lebesgue domin. Konvergenz

wegen
- $\varphi_n f \to \varphi f$ punktweise
- $|\varphi_n f| \leq \underbrace{\chi_K \, 2 \sup_{x \in \Omega}(|\varphi(x)|) \, |f|}_{\in L^1(\Omega)}$ für $n$ groß genug (wegen $\varphi_n \xrightarrow{glm} \varphi$)

2) Dirac-Distribution $\delta_{x_0}$ in $x_0 \in \Omega$

$$\delta_{x_0} : \begin{cases} D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0) \end{cases}$$

Offensichtlich $\delta_{x_0} \in D'(\Omega)$.

Def: (distributionelle Ableitung)

Sei $T \in D'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (Multiindex). Die $\alpha$-Ableitung von $T$ ist

$$(D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Bsp: Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $T_f$ wie oben.

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\, D^\alpha \varphi(x)\,dx \quad \text{(per Definition)}$$

Falls $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, dann nach partiellen Integration

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = \int_\Omega D^\alpha f(x)\, \varphi(x)\,dx = (T_{D^\alpha f})(\varphi).$$

**Satz 2.6** Es gilt $\quad -\Delta\Phi = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (d.h. im Distributionssinn)

genauer: $\quad -\Delta T_\Phi = \delta_0$

**Bew:** Für beliebiges $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ sei $f := -\Delta u$ (dann $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$) gilt nach Satz 2.5 und Satz 2.17 (Eindeutigkeit)

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\,\Delta u(y)\,dy.$$

Deshalb auch für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ~~und~~ $x=0$:

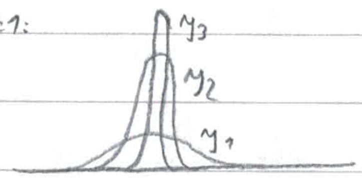
$$\varphi(0) = -\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(-y)}_{=\Phi(y)}\,\Delta\varphi(y)\,dy = -(-1)^2\int \Phi(y)\,\Delta\varphi(y)\,dy$$
$$= -\Delta T_\Phi(\varphi). \quad \blacksquare$$

**Physikalische Interpretation der Fundamentallösung**

$\delta_0$ ist das distributionelle Limes einer „Dirac-Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$" mit

- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x)\,dx = 1$
- $\eta_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \eta_k(x)\,dx = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$n=1$:




**Bsp:** 1) Elektrostatik: Für die Ladungsdichte $f$ und elektr. Potential $u$ gilt $\quad -\Delta u = f$

↳ $f = \delta_x$ beschreibt die Ladung 1 konzentriert in $x$ („Punktladung")

2) Gravitation: Für die Massedichte $f$ und Gravitationspotential $u$ gilt $\quad \Delta u = f$

↳ $-\Phi$ = Potential einer Punktmasse

# Greensche Funktion

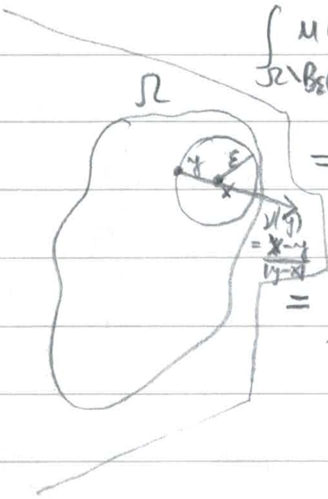
**Lemma 2.7** (Greensche Darstellung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschr. Lip-Gebiet, $x \in \Omega$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$u(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\,\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y) - u(y)\,\nabla_y\big(\Phi(x-y)\big)\cdot\nu(y)\,dS(y), \quad x\in\Omega.$$

Bew: Sei $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Green $\Rightarrow$




$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} u(y)\underbrace{\Delta_y\big(\Phi(x-y)\big)}_{=0,\ \text{da } |x-y|>0} - \Delta u(y)\,\Phi(x-y)\,dy =$$

$$= \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(x))} u(y)\,\nabla_y\big(\Phi(x-y)\big)\cdot\nu(y) - \Phi(x-y)\,\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \dots\, dS(y) \underbrace{- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,\nabla_y\big(\Phi(x-y)\big)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\,dS(y)}_{=:\,I_1} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(x)}(y)\,dS(y)}_{|\cdot| \le c\|u\|_{C^1(\overline{B_\varepsilon(x)})}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}|\Phi(y)|\,dS(y)\ \to 0\ (\varepsilon\to 0)}$$

$$I_1 = \left[\tilde{y} := x-y\right] = -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-\tilde{y})\,\nabla\Phi(\tilde{y})\left(\frac{-\tilde{y}}{|\tilde{y}|}\right)dS(\tilde{y}) = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-y)\,\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\,dS(y)$$

$$\to -u(x) \quad (\varepsilon\to 0), \quad \text{cf. Bew von Satz 2.5}$$

$$\underset{(\varepsilon\to 0)}{\Rightarrow}\quad u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y)\,\Phi(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} u(y)\,\nabla_y\big(\Phi(x-y)\big)\cdot\nu(y) - \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

$\blacksquare$

**Anwendung an das Dirichlet-Problem (15)**

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x&\in\Omega \\ u(x) &= h(x), & x&\in\partial\Omega \\ &\text{mit } \Omega\subset\mathbb{R}^n \text{ beschr. Lip.-Gebiet}, & f&\in C(\Omega),\ h\in C(\partial\Omega) \end{aligned}\right\} (15)$$

Lsgen von (15) erfüllen also

$$(28)\qquad u(x) = \int_\Omega f(y)\,\Phi(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} h(y)\,\nabla_y\big(\Phi(x-y)\big)\cdot\nu(y)\,dS(y) + \int_{\partial\Omega}\Phi(x-y)\,\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

Problem: (28) nicht explizit wegen letztem Term!

Ausweg: Suche Funktion $G(x,y) = \Phi(x-y) + w(x,y)$

↪ Korrekturfunktion

sodass

$$(29) \begin{cases} \Delta_y w(x,y) = 0, & x,y \in \Omega \\ w(x,y) = -\Phi(x-y), & x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Sei $w$ ein Lsg von (29) mit $w(x,\cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ $\forall x \in \Omega$. Dann

Green $\Rightarrow$ $$\int_\Omega w(x,y) \underbrace{\Delta u(y)}_{=-f(y)} dy - \int_\Omega u(y) \underbrace{\Delta_y w(x,y)}_{=0} dy = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w(x,y)}_{=-\Phi(x-y)} \nabla u(y)\cdot\nu(y) - \underbrace{u(y)}_{=h(y)} \nabla_y w(x,y)\cdot\nu(y) \, dS(y)$$

$$(30) \quad \int_\Omega w(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} h(y) \nabla_y w(x,y)\cdot\nu(y) dS(y) - \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \nabla u(y)\cdot\nu(y) \, dS(y)$$

(28) + (30):

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} h(y) \nabla_y G(x,y)\cdot\nu(y) dS(y).$$

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für eine eindeutige Lsg $w$ von (29) mit $w(x,\cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ für alle $x \in \Omega$ heißt

$$G(x,y) = \Phi(x-y) + w(x,y), \quad x \in \Omega,\ y \in \bar{\Omega},\ x \neq y$$

die Greensche Fkt für den Laplace-Operator zum Dirichlet-Problem auf $\Omega$.

Wir haben also:

Satz 2.8: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Lip.-Gebiet und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lsg von (15). Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} h(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS(y),$$

wobei $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) := \nabla_y G(x,y)\cdot\nu(y)$, $y \in \partial\Omega$.

<u>Bem</u>: 1) $\forall x \in \Omega$ erfüllt $G(x,\cdot)$

$$-\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) \quad , y \in \Omega \quad \text{(im Distrib.-Sinn)}$$
$$G(x,y) = 0 \quad , y \in \partial\Omega$$

2) Existiert $w$ zu (29) (und damit $G$)?

↳ cf. Perron-Verfahren (§ 2.4)

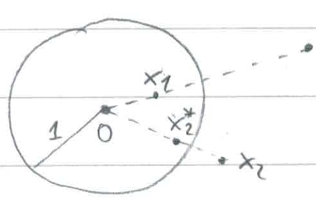
3) Wann ist $G$ explizit bekannt?

↳ selten, z.B. für $\Omega$ = Kugel, Halbraum

4) $G$ für das Neumann-Problem: Blatt 3

## Greensche Funktion für den Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

Spiegelungsmethode: Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt $x^* := \frac{1}{|x|^2} x$ der Spiegelpunkt zu $x$.




<u>Bem</u>: $x \in B_1(0) \Leftrightarrow x^* \notin B_1(0)$

<u>Satz 2.9</u> Die Greensche Fkt für $\Omega = B_1(0)$ ist

$$G: \begin{cases} B_1(0) \times \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi(|x|(x^*-y)), & x \neq 0, y \neq x \\ \Phi(y) - \Phi(e_1), & x = 0, y \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

<u>Bem</u>: Seite 26,5.

<u>Bew</u>: Die Korrekturfkt ist $w(x,y) = \begin{cases} -\Phi(|x|(x^*-y)) & , x \in B_1(0)\setminus\{0\}, y \in B_1(0) \\ -\Phi(e_1) & , x = 0, y \in B_1(0) \end{cases}$

1) z.z. $\Delta_y w(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in B_1(0)$

Sei $x,y \in B_1(0)$.

a) $x \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \\ x^* \notin B_1(0) \Rightarrow x^* - y \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x|(x^*-y) \neq 0 \Rightarrow \Delta_y \Phi(|x|(x^*-y)) =$

$= |x|^2 \underbrace{(\Delta_y \Phi)(|x|(x^*-y))}_{=0} = 0$

Bem: In $\mathbb{R}^n$ wäre $\Delta_2 G(x,\cdot) = \delta_x - |x|^2 \delta_{x^*}$

Elektrostatik: für das Problem auf $B_1(0)$ führen wir also eine gedankliche Ladung in $x^*$ ein

↳ führt zu Potential $=0$ $(G(x,y)=0)$ auf $\partial B_1(0)$

b) $x=0$: $\quad \Delta_y w(0,y) = -\Delta_y(\Phi(e_1)) = 0$

2) z.z. $w(x,y) = -\Phi(x-y) \quad \forall x \in B_1(0),\ y \in \partial B_1(0)$

Sei $y \in \partial B_1(0)$.

$$|x|^2|y-x^*|^2 = |x|^2\left(1 - 2y\cdot x\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right) = |x|^2 - 2y\cdot x + \underset{|y|^2}{1} = |x-y|^2$$

$$\Rightarrow |x|\,|y-x^*| = |x-y| \qquad (*)$$

Also: $$w(x,y) = \begin{cases} -\Phi(|x|(x^*-y)) \underset{(\Phi \text{ radial sym.})}{=} -\Phi(x-y) & , x \neq 0 \\ -\Phi(e_1) \underset{\substack{|y|=1 \\ (\Phi \text{ rad. sym})}}{=} -\Phi(y) \underset{(x=0)}{=} -\Phi(x-y) & , x=0 \end{cases}$$

∎

$G$ kann noch umformiert werden und man hat:

<u>Korollar 2.10</u>

Sei $u \in C^2(\bar\Omega)$ eine Lsg von (15) mit $\Omega = B_1(0)$. Dann gilt

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|}\int_{\partial B_1(0)} \frac{h(y)}{|x-y|^n}\,dS(y) + \int_{B_1(0)} f(y)\,G(x,y)\,dy, \quad x \in \Omega. \tag{31}$$

<u>Bem:</u> $K(x,y) := \dfrac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|}|x-y|^{-n}$ heißt den <u>Poisson-Kern für $B_1(0)$</u>

<u>Bew:</u> z.z. $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -K(x,y) \quad \forall y \in \partial B_1(0)$

Erinnerung: $\nabla\Phi(z) = -\dfrac{1}{|\partial B_{|z|}(0)|}\dfrac{z}{|z|}$, $\quad |\partial B_{|z|}(0)| = |z|^{n-1}|S^{n-1}|$

cf L. 2.4

1) $x \neq 0$:

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot y = \nabla_y(\Phi(x-y))\cdot y - \nabla_y(\Phi(|x|(x^*-y)))\cdot y$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|}|x-y|^{1-n}\frac{x-y}{|x-y|}\cdot y - \frac{1}{|S^{n-1}|}\underbrace{|x|^{1-n}|x^*-y|^{1-n}}_{\overset{(*)}{=}|x-y|^{1-n}}\underbrace{|x|\frac{x^*-y}{|x^*-y|}}_{\overset{(*)}{=}\frac{x^*-y}{|x-y|}|x|^2}\cdot y$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|}\left(\frac{x-y-(x^*-y)|x|^2}{|x-y|^n}\right)\cdot y = \frac{1}{|S^{n-1}|}\left(\frac{x-y-x^*+y|x|^2}{|x-y|^n}\right)\cdot y$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|}\frac{|x|^2-1}{|x-y|^n} \quad ✓$$

2) $x=0$: $\frac{\partial G}{\partial \nu}(0,y) = \nabla\Phi(y)\cdot y = -\frac{1}{|S^{n-1}|}\frac{|y|^2}{|y|} = -\frac{1}{|S^{n-1}|}$ $\forall y \in \partial B_1(0)$ ∎

Bem: Korollar 2.10 sagt nicht, dass (31) eine Lsg von (18) ist!!
Wir zeigen dies für $f=0$.

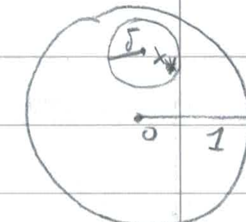
Satz 2.11 Sei $h \in C(\partial B_1(0))$ und
$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial B_1(0)} K(x,y)\, h(y)\, dS(y), & x \in B_1(0) \\ h(x), & x \in \partial B_1(0). \end{cases}$$

Dann ist $u$ eine klass. Lsg von
$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in B_1(0)$$
$$u(x) = h(x), \quad x \in \partial B_1(0).$$

Außerdem ist $u \in C^\infty(B_1(0))$.

Bew: 1) rechtfertige Ableiten unter $\int_{\partial B_1(0)}$ (majorisierte Konvergenz von Lebesgue)

Sei $x_* \in B_1(0)$, wähle $\delta > 0$ s.d. $0 < \delta < 1 - |x_*|$.




$\partial_x^\alpha K$ ist auf $B_\delta(x_*) \times \partial B_1(0)$ gleichm. stetig (in beiden Variablen) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

$\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ hat $y \mapsto \partial_x^\alpha K(x,y)$ eine (in $x$) gleichm. $L^1(\partial B_1(0))$-Majorante

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \partial^\alpha u(x_*) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{\partial B_1(0)} \partial^\alpha_x K(x_*,y)\, h(y)\, dS(y)$$

und $\partial^\alpha u$ stetig $\Rightarrow$ $u \in C^\infty(B_1(0))$

2) z.z. $\Delta u(x) = 0$

$$\partial_{x_i}\left(\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - n(1-|x|^2)|x-y|^{-n-1}\frac{x_i-y_i}{|x-y|} = \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - \frac{n(1-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}}$$

$$\partial^2_{x_i}\left(\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\right) = -\frac{2}{|x-y|^n} + \frac{4n x_i(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}} - \frac{n(1-|x|^2)}{|x-y|^{n+2}} + \frac{n(n+2)(1-|x|^2)(x_i-y_i)^2}{|x-y|^{n+4}}$$

$$\Rightarrow \Delta_x \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} = |x-y|^{-(n+2)}\left[2n|x-y|^2 + 4n x\cdot(x-y) - n^2(1-|x|^2) + n(n+2)(1-|x|^2)\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $\Delta_x K(x,y) = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta u(x) = 0$ $\forall x \in B_\delta(x_*)$

3) z.z. $\lim\limits_{\substack{x \to x_* \\ x \in B_1(0)}} u(x) = h(x_*) \qquad \forall x_* \in \partial B_1(0)$

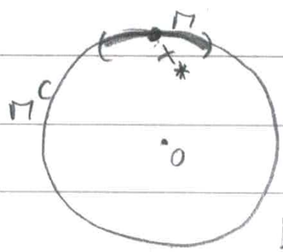
(i) Aus: (31) mit $h \equiv 1$, $f \equiv 0$, $u \equiv 1$ folgt

$$1 = \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|x-y|^n} \, dS(y) \qquad (32)$$

$h$ stetig auf $\partial B_1(0)$ (kompakt) $\Rightarrow$ $h$ glchm. stetig $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \quad |y-x| < \delta, \; x,y \in \partial B_1(0) \Rightarrow |h(y) - h(x)| < \varepsilon.$

Zu einem $x_* \in \partial B_1(0)$ sei



$M := \{ y \in \partial B_1(0) : |y - x_*| < \delta \}$

$M^c = \{ \quad : \quad \geq \delta \} = \partial B_1(0) \setminus M$

$$u(x) - h(x_*) \overset{(32)}{=} \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|} \left( \int_M \frac{h(y) - h(x_*)}{|x-y|^n} \, dS(y) + \int_{M^c} \frac{h(y) - h(x_*)}{|x-y|^n} \, dS(y) \right)$$

Sei $x \in B_1(0) : |x - x_*| < \frac{\delta}{2}$.

Für $y \in M^c$ ist $|y-x| \geq |y - x_*| - |x_* - x| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$

und $\dfrac{|h(y) - h(x_*)|}{|y-x|^n} \leq \dfrac{2^{n+1} \|h\|_\infty}{\delta^n}$.

$$\Rightarrow |u(x) - h(x_*)| \leq \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|} \left( \int_M \frac{\varepsilon}{|x-y|^n} \, dS(y) + \int_{M^c} \frac{2^{n+1} \|h\|_\infty}{\delta^n} \, dS(y) \right)$$

$$\leq \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|} \left( \int_{\partial B_1(0)} -\|- \; + \int_{\partial B_1(0)} -\|- \right)$$

$$\overset{(32)}{=} \varepsilon + \frac{1-|x|^2}{\delta^n} 2^{n+1} \|h\|_\infty$$

$< 2\varepsilon$ falls $|x - x_*| < \tilde{\delta} < \frac{\delta}{2}$ mit $\tilde{\delta}$ klein genug,

weil $1 - |x|^2 = (1+|x|)(1-|x|) \leq 2(1-|x|) = 2(|x_*| - |x|)$

$\leq 2|x_* - x| < 2\tilde{\delta}$

$\blacksquare$

$\downarrow$

Poisson-kern für allgemeinen Ball $B_R(x_0)$, $R>0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\Omega := B_R(x_0)$, $h \in C(\partial\Omega)$. Setze $h_R(x) := h(Rx + x_0)$.

Es gilt $h_R \in C(\partial B_1(0))$ und

$$u_R(x) := \frac{1-|x|^2}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} \frac{h_R(y)}{|x-y|^n} \, dS(y)$$

erfüllt
$$-\Delta u_R = 0 \quad \text{in } B_1(0)$$
$$u_R = h_R \quad \text{auf } \partial B_1(0).$$

$$h(x) = h_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right), \quad x \in \partial B_R(x_0)$$

$\Rightarrow$ setze also $u(x) := u_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right)$, $x \in \overline{B_R(x_0)}$

Dann (i) $\Delta u(x) = R^{-2} (\Delta u_R)\left(\frac{x-x_0}{R}\right) = 0$, $x \in B_R(x_0)$

(ii) sei $x \in \partial B_R(x_0)$
$$u(x) = u_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right) = h_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right) = h(x).$$

Umformen:
$$u(x) = \frac{1 - \frac{|x-x_0|^2}{R^2}}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} \frac{h(Ry+x_0)}{\left|\frac{x-x_0}{R} - y\right|^n} \, dS(y)$$

$$\overset{z := Ry+x_0}{=} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R^2 |S^{n-1}|} \int_{\partial B_R(x_0)} R^{1-n} R^n \frac{h(z)}{|x-z|^n} \, dS(z)$$

$$= \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R|S^{n-1}|} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{h(z)}{|x-z|^n} \, dS(z), \quad x \in B_R(x_0).$$

Poisson-kern für $B_R(0)$:

(33) $$K_R(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{R|S^{n-1}|} \frac{1}{|x-y|^n}, \quad x \in B_R(0),\ y \in \partial B_R(0).$$

<u>Bem:</u> Zwei Lösungsdarstellungen für $\Delta u = 0$, $B_1(0)$
$u = h$, $\partial B_1(0)$

a) $$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_1(0)} k(x,y)\, h(y)\, dS(y), & x \in B_1(0) \\ h(x), & x \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

b) $$u(x) = \tilde{u}(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi$$

wobei $h(x) = \tilde{h}(\varphi)$, $x \in \partial B_1(0)$
$x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

-Voraussetzung: $\tilde{h} \in C([0,2\pi])$, stückweise $C^1([0,2\pi])$ & periodisch)

cf. Blatt 2

- Nach Korollar 2.10 sind a) & b) identisch, falls in b) $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- Direkte Umformung zeigt die Identität ohne Nachweis von $u \in C^1(\bar{\Omega})$, cf. Skript von Ch. Meyer.
- Alternativ verwende Satz 2.17 unten.

## 2.3 Eigenschaften harmonischer Funktionen

<u>Def:</u> (Gaußsche Mittelwerte)

Sei $u \in C(\overline{B_R(x_0)}, \mathbb{R})$ mit $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$m_R(x_0, u) := \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x)\, dS(x)$$ heißt der Oberflächenmittelwert von $u$ in $x_0$

$$M_R(x_0, u) := \frac{n}{|S^{n-1}| R^n} \int_{B_R(x_0)} u(x)\, dx$$ heißt der Volumenmittelwert von $u$ in $x_0$.

Erinnerung: $|\partial B_R(0)| = |S^{n-1}| R^{n-1}$, $\mathrm{vol}(B_R(0)) = \frac{|S^{n-1}|}{n} R^n$

<u>Lemma 2.12:</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \Omega$. Dann

$$\lim_{R \to 0} m_R(x_0, u) = \lim_{R \to 0} M_R(x_0, u) = u(x_0).$$

<u>Bew</u>: $m_R(x_0,u) - u(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x) - u(x_0)\, dS(x)$

$u$ stetig $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $R < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$.

Also $|m_R(x_0,u) - u(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} 1\, dS(x) = \varepsilon$

Übung (Blatt 4)

Für $M_R$ analog. ∎

<u>Satz 2.13</u> (Mittelwerteigenschaft)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$, $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$

(i) Falls $-\Delta u \leq 0$ auf $B_R(x_0)$, dann

$$u(x_0) \leq M_R(x_0) \leq m_R(x_0)$$

(ii) Falls $\Delta u = 0$ auf $B_R(x)$, dann

$$u(x_0) = m_R(x_0) = M_R(x_0).$$

<u>Bew</u>: (i) $m_R(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} R^{n-1} u(x_0 + Rz)\, dS(z) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + Rz)\, dS(z)$

$$\frac{d}{dr} m_r(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} (\nabla u)(x_0 + rz) \cdot z\, dS(z)$$

$$\underset{(\nu(z)=z)}{\overset{\text{Gauß}}{=}} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{B_1(0)} \nabla \cdot (\nabla u(x_0 + rz))\, dz$$

$$= \frac{r}{|S^{n-1}|} \int_{B_1(0)} \Delta u(x_0 + rz)\, dz \geq 0$$

$u \in C^2(\overline{B_R(x_0)})$, $v(z,r) := u(x_0 + rz)$
$v, \partial_r v$ gleichm. stetig auf $\partial B_1(0) \times [0,R]$
$\Rightarrow \partial_r \int v(z,r)\, dz = \int \partial_r v(z,r)\, dz$

$$u(x_0) \overset{L.2.12}{=} \lim_{r \to 0} m_r(x_0) \leq m_R(x_0) \quad \text{(da } m_r \text{ nicht fallend)} \qquad (*)$$

$$M_R(x_0) \underset{\text{(Zwiebelinteg.)}}{=} \frac{n}{|S^{n-1}| R^n} \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, dS(y)\, dr = \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} \underbrace{m_r(x_0)}_{\geq u(x_0)}\, dr \geq u(x_0) \qquad (**)$$

Außerdem, wegen $m_r(x_0) \leq m_R(x_0)$ ist $M_R(x_0) \leq \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} dr\, m_R(x_0) = m_R(x_0)$.

(ii) $\Delta u \geq 0 \Rightarrow -\Delta u \leq 0$, $-\Delta v \leq 0$, wobei $v := -u$.

$$\Rightarrow \begin{rcases} \bullet\ m_R(x_0; v) \overset{(i)}{\geq} v(x_0) = -u(x_0) \\ \quad \| \\ -m_R(x_0, u) \\ \bullet\ m_R(x_0; u) \overset{(i)}{\geq} u(x_0) \end{rcases} \Rightarrow m_R(x_0; u) = u(x_0)$$

Wegen (i) folgt dann auch $u(x_0) = M_R(x_0; u)$. ∎

**Satz 2.14** (inverse MWE)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ und $M_R(x_0) = u(x_0)$ oder $m_R(x_0) = u(x_0)$ $\forall \overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$.
Dann ist $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$.

Bew: 1) Angenommen $-\Delta u(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in \Omega$. Dann $\exists R > 0$ s.d. $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, $-\Delta u(x) < 0$ $\forall x \in \overline{B_R(x_0)}$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} m_r(x_0) > 0 \qquad \forall r \in (0, R)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} m_R(x_0) > u(x_0) \qquad \overset{(**)}{\Rightarrow} M_R(x_0) > u(x_0) \qquad \rightarrow\leftarrow$$

2) Falls $-\Delta u(x_0) > 0$, analog. ∎

Bem: Später wird gezeigt sogar $u \in C(\Omega)$, $M_R(x_0) = u(x_0)$ oder $m_R(x_0) = u(x_0)$ $\forall \overline{B_R(x_0)} \subset \Omega \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$, $\Delta u = 0$ in $\Omega$.

**Satz 2.15** (Maximumprinzip) !!

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschr. und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
Falls $-\Delta u \leq 0$ in $\Omega$, dann

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Bew: $\overline{\Omega}$ kompakt $\Rightarrow \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ angenommen in einem $x_0 \in \overline{\Omega}$

(a) sei sogar $-\Delta u < 0$ in $\Omega$

Falls $x_0 \in \Omega$ (inneres Max.), dann $D^2 u(x_0)$ negativ semi-definit

$$\Rightarrow \Delta u(x_0) = tr(D^2 u(x_0)) \leq 0 \qquad \rightarrow\leftarrow$$

(b) Sei $-\Delta u \le 0$ in $\Omega$

Betrachte $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{x_1}$ mit $\varepsilon > 0$

$-\Delta u_\varepsilon = -\Delta u - \varepsilon e^{x_1} < 0$

Wende (a) auf $u_\varepsilon$ an:

$$\max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{x_1} \ge \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \max_{\bar\Omega} u_\varepsilon \ge \max_{\bar\Omega} u$$

Mit $\varepsilon \to 0$: $\max_{\partial\Omega} u \ge \max_{\bar\Omega} u$

offenbar auch — " — $\le$ — " — (da $\partial\Omega \subset \bar\Omega$)

$\Rightarrow$ „="

Bem: 1) Für $-\Delta u \ge 0$ gilt das Minimumprinzip (wende Satz 2.15 auf $-u$ an)

2) Für $\Delta u = 0$ gilt

$$\max_{\bar\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u \,, \quad \min_{\bar\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Satz 2.16 (Starkes Maximumprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet (d.h. offen, beschr., zusammenhäng.) und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ mit $-\Delta u \le 0$ in $\Omega$. Dann ist

entweder (i) $u(x) < \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \forall x \in \Omega$

oder (ii) $u \equiv \text{const.}$ in $\Omega$.

Bew: $K := \max_{x \in \bar\Omega} u(x)$, $\Sigma := \{x \in \Omega : u(x) = K\}$

1) $\Sigma$ ist relativ abgeschlossen in $\Omega$, da $u$ stetig

2) $\Sigma$ ist rel. offen in $\Omega$, denn:

Sei $x_0 \in \Sigma$ beliebig und $r > 0$ s.d. $B_r(x_0) \subset \Omega$

$$K = u(x_0) \overset{\text{MWE}}{\le} M_r(x_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \underbrace{u(y)}_{\le K} \, dy \le K$$

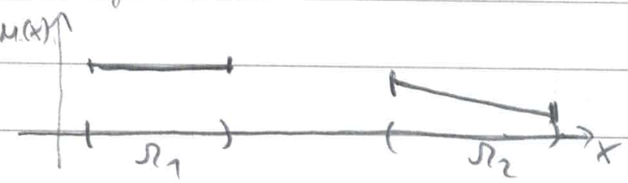
d.h. $\quad M_r(x_0) = k \quad \& \quad u(x) \leq k \quad \forall x \in B_r(x_0)$

$\Rightarrow u \equiv k$ auf $B_r(x_0) \Rightarrow B_r(x_0) \subset \Sigma$

1), 2) $\underset{\Omega \text{ zusammenh.}}{\Longrightarrow}$ $\Sigma = \emptyset$ (Fall (i)) oder $\Sigma = \Omega$ (Fall (ii)) $\blacksquare$

Bem: 1) Falls $\Omega$ nicht zusammenh. (Satz 2.15), dann innere Maxima / Minima möglich.

Bsp: $(n=1)$




$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

2) Es gilt sogar:

Sei $\Delta u = 0$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Falls $u$ in $\Omega$ ein lokales Max oder Min hat, dann ist $u \equiv$ const in $\Omega$.

Satz 2.17 (Eindeutigkeit für das Dirichl.-Problem der Poiss.-Gl.)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschr., $h \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Dann gibt es höchstens eine klass. Lsg von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$
$$u = h \text{ auf } \partial\Omega.$$

Bew: Seien $u, \tilde{u}$ zwei Lsgen, $v := u - \tilde{u}$.

Dann $\quad -\Delta v = 0$ in $\Omega$

$\quad v = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Max.-Prinzip für } v: & v \leq \max\limits_{\partial\Omega} v & = 0 \\ \text{— " — } -v: & -v \leq \max\limits_{\partial\Omega} (-v) & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v \equiv 0$$

$\blacksquare$

Satz 2.18 (Harnacksche Ungleichung)

Sei $u: B_R(0) \to [0, \infty)$ harmonisch. Dann

$$R^{n-2} \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} u(0) \quad \forall x \in B_R(0). \tag{34}$$

Bew: Für $y \in \partial B_R(0)$, $x \in B_R(0)$ ist

$$R-|x| = |y|-|x| \leq |x-y| \leq |x|+|y| \leq R+|x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R^2-|x|^2}{R|S^{n-1}|}\frac{1}{(R+|x|)^n} \leq K_R(x,y) \leq \frac{R^2-|x|^2}{R|S^{n-1}|}\frac{1}{(R-|x|)^n} \qquad (*)$$

a) $u \in C(\overline{B_R(0)})$

Multipliziere $(*)$ mit $u(y)$, integriere über $\partial B_R(0)$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R|S^{n-1}|}\frac{1}{(R+|x|)^n}\underbrace{\int_{\partial B_R(0)} u(y)\,dS(y)}_{\underset{(MWE)}{=}|S^{n-1}|R^{n-1}u(0)} \leq \underbrace{\int_{\partial B_R(0)} K_R(x,y)u(y)\,dS(y)}_{=:I(x)} \leq \frac{R^2-|x|^2}{R|S^{n-1}|}\frac{1}{(R-|x|)^n}\int_{\partial B_R(0)} u(y)\,dS(y)$$

- $I(x) = u(x)$ weil beide $u$ und $I$ Lsgen von $-\Delta\varphi = 0$, $B_R(0)$
  $\varphi = u|_{\partial B_R(0)}$, $\partial B_R(0)$

  sind (cf Koroll. 2.10) und wegen Eindeutigkeit.

$$\Rightarrow \quad R^{n-2}\frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n}u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2}\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}u(0) \qquad \Rightarrow (34)$$

b) nur $u \in C^2(B_R(0))$ vorausgesetzt

Verwende a) auf $\overline{B_\rho(0)}$, $\rho < R$ und lass $\rho \to R$. ∎

**Korollar 2.19** Sei $u: B_R(0) \to [0,\infty)$ harmonisch. Dann

$$u(x) \leq 3^n u(y) \qquad \forall x,y \in \overline{B_{R/2}(0)}$$

Insbesondere $\displaystyle \max_{x\in\overline{B_{R/2}(0)}} u(x) \leq 3^n \min_{x\in\overline{B_{R/2}(0)}} u(x)$

Bew: $|x| \leq \frac{R}{2} \Rightarrow R+|x| \leq \frac{3}{2}R$, $R-|x| \geq \frac{R}{2}$

$$\overset{(34)}{\Rightarrow} \quad R^{n-2}\frac{R}{2\left(\frac{3}{2}R\right)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2}\frac{3R}{2\left(\frac{R}{2}\right)^{n-1}}u(0)$$

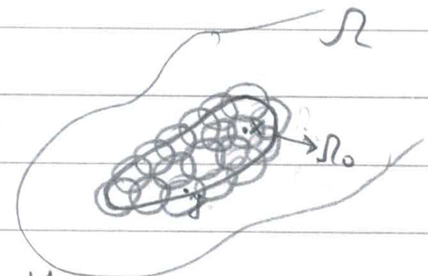
$$\Rightarrow \quad 2^{n-2}\cdot 3^{1-n}u(0) \leq u(x) \leq 2^{n-2}\,3\,u(0) \qquad \forall x \in \overline{B_{R/2}(0)}$$

$\Rightarrow u(x) \le 3 \cdot 2^{n-2} u(0) \le 3^n u(y) \quad \forall x,y \in \overline{B_{R/2}(0)}$ ∎

**Satz 2.20** (allgemeine Harnacksche Ungl.)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u$ harmonisch auf $\Omega$. Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ Teilgebiet mit $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ kompakt. Dann $\exists\, C > 0$, $C = C(\Omega_0, \Omega)$ s.d.

$$\max_{x \in \overline{\Omega_0}} u(x) \le C \min_{x \in \overline{\Omega_0}} u .$$

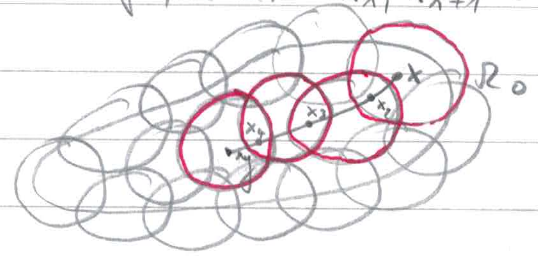



**Bew.:** Sei $0 < R < \mathrm{dist}(\overline{\Omega_0}, \partial\Omega)$

Überdecke $\overline{\Omega_0}$ mit Kugeln $\{B_{R/2}(a_1), \dots, B_{R/2}(a_k)\} = M$

($\overline{\Omega_0} \subset \mathbb{R}^n$ kpkt $\Rightarrow$ total-beschränkt)

Seien $x, y \in \Omega_0$, $x \neq y$. Dann gibt es $p$ Punkte $x_1, \dots, x_p$, $p \le k+1$ mit $x_1 = x$, $x_p = y$ und Kugeln $B_1, \dots B_p \in M$ mit $B_i \neq B_j$ falls $i \neq j$, s.d. $x_i, x_{i+1} \in \overline{B_i}$, $i = 1, \dots, p-1$.




$\overset{\text{Koroll. 2.19}}{\Rightarrow} \quad u(x_2) \le 3^n u(x_1),\ u(x_3) \le 3^n u(x_2), \dots, u(x_p) \le 3^n u(x_{p-1})$

$\Rightarrow u(y) = u(x_p) \le (3^n)^{p-1} u(x) \le \underbrace{3^{nk}}_{=:C} u(x)$ ∎

**Satz 2.21** (Liouville)

Sei $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach oben oder unten beschränkt. Dann ist $u$ konstant.

**Bew.:** a) $u(x) \le C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Sei $w(x) := C - u(x)$. Offenbar $w \ge 0$ und $\Delta w = 0$ in $\mathbb{R}^n$

Harnack $\Rightarrow$ $\underbrace{R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}}_{\to 1 \text{ für } R\to\infty \text{ und } x \text{ fest}} w(0) \le w(x) \le \underbrace{R^{n-1}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}}_{\to 1} w(0) \quad \forall R>0$

Also mit $R\to\infty$ gilt $\quad w(0) \le w(x) \le w(0) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $w$ konstant $\Rightarrow$ $u$ konstant

b) $u(x) \ge C \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

Sei $w(x) = -u(x) - C$. ∎

Satz 2.22 (Cauchy-Abschätzung)

Zu jedem Multiindex $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ gibt es $C_\alpha>0$, so dass falls $u: B_R(a)\to\mathbb{R}$ harmonisch und $|u(x)|\le M \quad \forall x\in B_R(a)$, dann

$$|D^\alpha u(a)| \le \frac{C_\alpha M}{R^{|\alpha|}}. \qquad (|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n)$$

Bew: OBdA $a=0$ (sonst $\tilde u(x) := u(x+a)$)

(a) Sei $R=1$ und $u\in C(\overline{B_1(0)})$

Nach Korol. 2.10: $\quad u(x) = \int_{\partial B_1(0)} K(x,y)\, u(y)\, dS(y)$ (Poiss-kern)

$K(x,y)\,u(y)$ und $(D_x^\alpha K)(x,y)\,u(y)$ sind glm. stetig auf $B_\delta(0)\times\partial B_1(0)$, $\delta\in(0,1)$

$$\Rightarrow \quad D^\alpha u(x) = \int_{\partial B_1(0)} (D_x^\alpha K)(x,y)\, u(y)\, dS(y) \qquad \forall x\in B_\delta(0)$$

$$\Rightarrow \quad |D^\alpha u(0)| \le M \int_{\partial B_1(0)} |(D_x^\alpha K)(0,y)|\, dS(y) =: M C_\alpha \quad ✓$$

(b) Sei $R>0$. Für $\rho\in(0,R)$ setze $u_\rho(x) := u(\rho x)$

$u$ harmon. $\Rightarrow u\in C^2(B_R(0)) \Rightarrow u\in C^2(\overline{B_\rho(0)}) \Rightarrow u_\rho\in C^2(\overline{B_1(0)})$

$$|D^\alpha u(0)|\,\rho^{|\alpha|} = |D^\alpha u_\rho(0)| \overset{(a)}{\le} C_\alpha M$$

Lass $\rho\to R$ ∎

## 2.4. Sub- und Superharmonische Funktionen; Perron-Verfahren

**Def:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. $u$ heißt subharmonisch bzw. superharmonisch auf $\Omega$, falls $\forall B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ gilt

$$u(x_0) \leq M_R(x_0, u)$$

bzw. $$u(x_0) \geq M_R(x_0, u).$$

Bem: genauer „sub/superharmonisch im Mittelwertsinne"

**Lemma 2.23.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Dann

(i) $-\Delta u \leq 0$ in $\Omega$ $\iff$ $u$ subharm. in $\Omega$

(ii) $-\Delta u \geq 0$ in $\Omega$ $\iff$ $u$ superharm. in $\Omega$

Bew: (i) ($\Rightarrow$) folgt aus Satz 2.13

($\Leftarrow$): Sei $-\Delta u(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \Omega$.

$u \in C^2 \Rightarrow -\Delta u > 0$ auf $B_\delta(x_0)$ für ein $\delta > 0$

$\overset{S.2.13}{\Longrightarrow} u(x_0) > M_\delta(x_0, u)$

(ii) analog ∎

**Lemma 2.24** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet.

(i) Falls $u \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch, dann $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

(ii) Falls $u \in C(\overline{\Omega})$ superharmonisch, dann $\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$

Bew: cf. Beweis vom starken Max-Prinzip (Satz 2.16)

**Def:** (Unterfunktion, Oberfunktion)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet und $h \in C(\partial\Omega)$.

$\mathcal{U}(\Omega, h) := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ subharmonisch und } v \leq h \text{ auf } \partial\Omega\}$ = Unterfunktionen

$\mathcal{W}(\Omega, h) := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ superharm. und } v \geq h \text{ auf } \partial\Omega\}$ = Oberfunktionen

Bem: $\mathcal{V} \neq \emptyset$ und $\mathcal{W} \neq \emptyset$ da $v := \min\limits_{\partial\Omega} h \in \mathcal{V}$
und $w := \max\limits_{\partial\Omega} h \in \mathcal{W}$

Lemma 2.25: Es gilt $w \geq v$ für alle $w \in \mathcal{W}(\Omega, h)$ und $v \in \mathcal{V}(\Omega, h)$.

Bew: $\psi := w - v$

1) z.z. $\psi \in \mathcal{W}(\Omega, 0)$

Sei $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ beliebig. Dann $\psi(x_0) \geq M_R(x_0, w) - M_R(x_0, v) = M_R(x_0, \psi)$.

$\psi \geq h - h = 0$ auf $\partial\Omega$ ✓

2) Nach L. 2.24 ist $\psi \geq 0$ auf $\overline{\Omega}$. ▪

Satz 2.26 (inverse MWE - 2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet und $u \in C(\Omega)$ erfülle die MWE für jedes $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Bew: Sei $x_0 \in \Omega$, $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$.

$$P_{R,x_0}(u) := \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R|S^{n-1}|} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, dS(y)$$ Poisson-Integral von $u|_{\partial B_R(x_0)}$

Nach S. 2.11 reicht z.z. $u = P_{R,x_0}(u)$ in $B_R(x_0)$.

Sei $$\psi(x) := \begin{cases} P_{R,x_0}(u)(x), & x \in B_R(x_0) \\ u(x), & x \in \partial B_R(x_0) \end{cases}$$

$\overset{S.2.11}{\Longrightarrow} \psi \in C^\infty(B_R(x_0))$, $\Delta\psi = 0$ in $B_R(x_0)$ $\overset{S.2.13}{\Longrightarrow} \psi(x_0) = M_R(x_0, \psi)$

- $u, -u$ sind superharmon. in $\Omega$
- $u = \psi$ auf $\partial B_R(x_0)$

$\Big\} \Rightarrow u \in \mathcal{W}(B_R(x_0), \psi|_{\partial B_R(x_0)})$
$-u \in \mathcal{W}(B_R(x_0), -\psi|_{\partial B_R(x_0)})$

Aber auch $\psi \in \mathcal{V}(B_R(x_0), \psi|_{\partial B_R(x_0)})$ und $-\psi \in \mathcal{V}(B_R(x_0), -\psi|_{\partial B_R(x_0)})$

Nach L. 2.25 ist $\left.\begin{aligned} u &\geq \psi \quad \text{in } B_R(x_0) \\ -u &\geq -\psi \quad \text{in } B_R(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = \psi$ in $B_R(x_0)$

## Das Perron-Verfahren

offene Frage zum Dirichlet-Problem:

- Existenz der Korrektur funktion $w$ (offen außer für spezielle $\Omega$)
- allgemeiner: Existenz von Lösungen zu

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \\ \text{mit } \Omega \subset \mathbb{R}^n &\text{ beschr. Gebiet}, \; h \in C(\partial\Omega). \end{aligned}\right\} \quad (P)$$

Idee von Perron:

$u$ ist auch Unterfunktion $\overset{L.2.25}{\Longrightarrow}$ $u \leq w$ $\forall$ Oberfunktion $w$

Also erwarte „$u = \inf\{w : w \in \mathcal{W}\}$"
(alternativ „$u = \sup\{v : v \in \mathcal{V}\}$")

Genauer:

**Satz 2.27**: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet, $h \in C(\partial\Omega)$. Die Funktion

$$u : \begin{cases} \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}(\Omega, h)\} \end{cases} \quad (34)$$

ist harmonisch in $\Omega$.

Bem: 1) Randdaten in (P) diskutiert später

2) Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ löst (P), dann $u \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}$

$\underset{(L.2.25)}{\overset{u \in \mathcal{V}}{\Longrightarrow}}$ $u \leq w$ $\forall w \in \mathcal{W}$ $\overset{u \in \mathcal{W}}{\Longrightarrow}$ $u(x) = \inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}\}$

Also klass. Lsgen haben die Gestalt (34).

<u>Def:</u> <u>(harmonische Liftung / Ersetzung</u> [harmonic lift])

Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ und $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Die Fkt

$$(T_{x_0,R}\, u)(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \bar{\Omega} \setminus B_R(x_0) \\ \int_{\partial B_R(x_0)} K_{R,x_0}(x,y)\, u(y)\, dS(y), & x \in B_R(x_0) \end{cases}$$

heißt die harmon. Liftung von $u$.

($K_{R,x_0}$ = Poiss.-kern für $B_R(x_0)$)

<u>Lemma 2.28</u>

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet und $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$.

(i) Für $u \in \mathcal{W}(\Omega, h)$ gilt $T_{x_0,R}\, u \in \mathcal{W}$ und $T_{x_0,R}\, u \leq u$ in $\Omega$

(ii) — " — $\mathcal{V}(\Omega, h)$ — " — $\in \mathcal{V}$ und — " — $\geq$ — " —

In beiden Fällen ist $T_{x_0,R}\, u$ harmonisch in $B_R(x_0)$.

<u>Bew:</u> $T_{x_0,R}\, u$ harmonisch in $B_R(x_0)$ wegen der Def. des Poiss-kernes & S. 2.11.

Sei $B := B_R(x_0)$.

(i): es ist $\left.\begin{aligned} \Delta(T_{x_0,R}\, u) &= 0 && \text{in } B \\ T_{x_0,R}\, u &= u && \text{auf } \partial B \end{aligned}\right\} \overset{L.2.25}{\Longrightarrow} T_{x_0,R}\, u \leq u$ in $\bar{B}$

$(T_{x_0,R}\, u \in \mathcal{V}(B, u|_{\partial B}))$

$\Rightarrow T_{x_0,R}\, u \leq u$ in $\bar{\Omega}$ (da $T_{x_0,R}\, u = u$ in $\bar{\Omega} \setminus B$)

noch z.z. $T_{x_0,R}\, u \in \mathcal{W}$

Es reicht z.z. $\forall x_* \in \Omega\ \exists \rho > 0 : (T_{x_0,R}\, u)(x_*) \geq M_\delta(x_*, T_{x_0,R}\, u)$ $\forall \delta \in (0, \rho)$ (*)


Zwei Fälle: a) $x_* \in B$. Dann wähle $\varrho = \operatorname{dist}(x_*, \partial B)$

$\Rightarrow$ es gilt „=" in (*), da $T_{x_0,R}\, u$ harmonisch in $B$

b) $x_* \in \Omega \setminus B$

wähle $\varrho = \operatorname{dist}(x_*, \partial\Omega)$. Dann $\forall \delta \in (0,\varrho)$

$$(T_{x_0,R}\, u)(x_*) = u(x_*) \underset{u \in W}{\geq} M_\delta(x_*, u) \underset{T_{x_0,R} u \leq u}{\geq} M_\delta(x_*, T_{x_0,R}\, u)$$

(ii) analog ■

---

**Lemma 2.29** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $u \in C(\Omega)$. Dann gilt

$u$ superharmonisch in $\Omega$ $\Leftrightarrow$ $\forall x_* \in \Omega\ \exists \varrho > 0: B_\varrho(x_*) \subset \Omega$ und $u(x_*) \geq M_\delta(x_*, u)$ $\forall \delta \in (0,\varrho)$.

(ohne Beweis)

---

**Bew. von Satz 2.27:**

- Sei $w_0 := \|h\|_\infty$. Offenbar $w_0 \in W(\Omega, h)$, $-w_0 \in V$
- Andere Darstellung von $u$:

$$\inf\{w(x) : w \in W\} \overset{w_0 \in W}{=} \inf\{w(x) : w \in W,\ w \leq w_0\}$$

$$\overset{T_{x_0,R} w \leq w}{\geq} \inf\{(T_{x_0,R}\, w)(x) : w \in W,\ w \leq w_0\} \quad (\forall \overline{B_R(x_0)} \subset \Omega)$$

$$\overset{T_{x_0,R} w \in W,\, w_0 \in W}{\geq} \inf\{w(x) : w \in W\}$$

Also ist dies eine Gleichungskette.

Mit $\mathcal{K} := \{T_{x_0,R}\, w : w \in W,\ w \leq w_0\}$ ist also

$$u(x) = \inf\{z(x) : z \in \mathcal{K}\}. \tag{35}$$

1) z.z. $u \in C(\Omega)$

Sei $B_R(x_0)$ belieb. mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$.

Für $w \in W$ ist $w \geq -w_0$ (da $-w_0 \in V$)

$\Rightarrow$ (i) $T_{x_0,R}\, w \geq T_{x_0,R}(-w_0) = -w_0$ $\left(\text{da } \int_{\partial B_R(x_0)} K_{R,x_0}(x,y)\, dS(y) = 1 \text{ analog zu } (32)\right)$

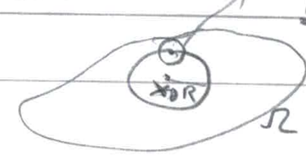
außerdem (ii) $T_{x_0,R}\, w \leq w$ (L. 2.28)

(i), (ii) $\Rightarrow$ $\|z\|_\infty \leq w_0$ $\forall z \in \mathcal{K}$

$\overset{\text{S. 2.22}}{\Rightarrow}$ (Cauchy-Absch.) $\left\| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{\infty, \overline{B_R(x_0)}} \leq C$ $\forall i = 1, \ldots, n$ $\forall z \in \mathcal{K}$

da $\operatorname{dist}(\overline{B_R(x_0)}, \partial\Omega) > 0$

Ball $B_\varrho(a)$ in S. 2.22



$\Rightarrow |z(x) - z(y)| \le C|x-y| \quad \forall x,y \in \overline{B_R(x_0)}, \ \forall z \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow z(x) \le z(y) + C|x-y|$

Mit $\inf\limits_{z \in \mathcal{A}}$ erhalte

$$u(x) \le u(y) + C|x-y| \quad \forall x,y \in \overline{B_R(x_0)}$$

$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \le C|x-y|$ — // —

$\Rightarrow u$ Lip-stetig in $\overline{B_R(x_0)} \Rightarrow u$ Lip.-stetig in $\Omega$

2) z.z. $u$ harmonisch in $\Omega$

Sei $\varepsilon > 0$. $\forall a \in \Omega \ \exists w_a \in W(\Omega, h): \ u(a) \le w_a(a) \le u(a) + \varepsilon$ (da $u = \inf$..)

$u, w_a$ stetig $\Rightarrow \exists$ off. Kugel $B(a) \subset \Omega$:

$$u(x) \le w_a(x) \le u(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in B(a). \quad (*)$$

Sei $B_R(x_0)$ off. Kugel mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Überdecke $\overline{B_R(x_0)}$ mit $B(a_i)$, $i = 1, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\overline{B_R(x_0)} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(a_i).$$

Setze $w(x) := \min\limits_{i=1,\dots,p} w_{a_i}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$.

Es gilt
- $w \in W$ (da $w_{a_i}(x) \ge M_R(x_0, w_{a_i}) \ge M_R(x_0, w) \ \forall i$ und in jedem $x$ ist $w(x) = w_{a_i}(x)$ für ein $i$)
- $u(x) \le w(x) \le u(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in \overline{B_R(x_0)}$ (wegen $(*)$)

Sei $z := T_{x_0,R}\, w$

- L. 2.28 $\Rightarrow z$ harmon. in $B_R(x_0)$, $z \in W$, $z \le w$ in $\Omega$
- (35) $\Rightarrow u \le z$

$\Rightarrow u(x) \le z(x) \le u(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in \overline{B_R(x_0)}$

d.h. $z \in C(\overline{B_R(x_0)})$ ist harmon. in $B_R(x_0)$ und $\|z - u\|_{\infty, \overline{B_R(x_0)}} \le 2\varepsilon$.

Wähle Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und zugehörige $(z_n)_n$.

$$z_n \xrightarrow[\text{in } B_R(x_0)]{\text{gleichm.}} u \ \xRightarrow[\text{(Weierstr.)}]{\text{L. 2.30}} \ u \text{ harmonisch in } B_R(x_0)$$

∎

**Lemma 2.30** (Konvergenzsatz von Weierstr.)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ Folge in $\Omega$ harmonischer Fkt-nen. Falls $(u_k)_k$ gleichmäßig auf $\partial\Omega$ konvergiert, dann konv. $(u_k)_k$ gleichm. auf $\overline{\Omega}$ gegen $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch in $\Omega$.

Übung

Bew: • $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad |u_k(x) - u_\ell(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \forall k,\ell \geq k_0$.

• $u_k - u_\ell$ ist harmonisch $\overset{\text{Max P}}{\underset{\text{Min-Prinz.}}{\Longrightarrow}} \quad |u_k(x) - u_\ell(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ k,\ell \geq k_0$

Also $(u_k)_k$ ist Cauchy-Folge bzgl der Sup-Norm auf $\overline{\Omega}$.

$\Rightarrow \quad u_k \xrightarrow{\text{gleichm.}} u \in C(\overline{\Omega})$.

Noch z.z. $u$ harmonisch.

Sei $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ beliebig.

$$u(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_0) \overset{\text{MWE}}{=} \lim_{k\to\infty} m_R(x_0, u_k) \underset{\text{konv.}}{\overset{\text{gleichm.}}{=}} m_R(x_0, \lim_{k\to\infty} u_k) = m_R(x_0, u)$$

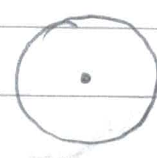
$\underset{\text{MWE}}{\overset{\text{inverse}}{\Longrightarrow}} \quad u$ harmonisch auf $\Omega$ $\square$

## Perron-Lösung und die Randdaten

**Frage:** Gilt $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) = h(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial\Omega$

für die Perron-Lsg $u$ in Satz 2.27 ?

Im Allgem. nicht!



**Bsp:** Sei $n \geq 2$, $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\}$

Sei $h(x) := \begin{cases} 0, & |x| = 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

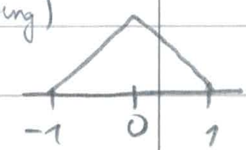
Beh.: Die Perron-Lsg ist $u(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

(also $\lim\limits_{x \to x_0 \in \partial\Omega} u(x) = 0$.)

Bew: Übung

Bem: 1) Es gibt keine klass. Lsg zum obigen Beispiel. (Übung)

2) Für $n=1$ ist $u(x) = 1 - |x|$ eine klass. Lsg



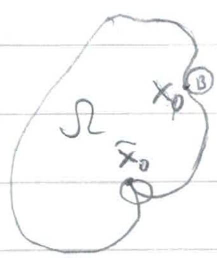

Def: (regulärer Randpunkt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet. $x_0 \in \partial\Omega$ heißt regul. Randpunkt, falls für alle $h \in C(\partial\Omega)$ und die zugehörige Perron-Lsg $u$ gilt

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \Omega} u(x) = h(x_0).$$

$\partial\Omega$ heißt regulär, falls jedes $x_0 \in \partial\Omega$ reg. Randpunkt.

Def: (äußere Kugelbedingung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\Omega$ erfüllt in $x_0 \in \partial\Omega$ die äußere Kugelbedingung (ÄKB), falls eine offene Kugel $B$ existiert mit

$$B \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \quad \overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}.$$




$x_0$: ÄKB gilt
$\tilde{x}_0$: ÄKB gilt nicht

Satz 2.31 Falls $\Omega$ in $x_0 \in \partial\Omega$ die ÄKB erfüllt, dann ist $x_0$ ein regulärer Randpunkt.

Bew: Sei $B := B_r(x_1)$ die Kugel aus der ÄKB in $x_0$ und sei

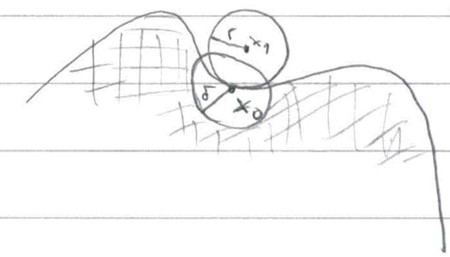
$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{x_1\} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \Phi(re_1) - \Phi(x - x_1) \end{cases}$$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ wie oben.

- $g$ harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1\}$ (also auch in $\Omega$)
- $g > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$
- $g(x_0) = 0$

$g$ ist so-genannte „Barrierenfunktion"

Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ s.d. $|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon$, falls $x \in \partial\Omega$, $|x - x_0| < \delta$.

Für $x \in \overline{\Omega}$, $|x - x_0| \geq \delta$ ist $g(x) \geq \beta$ für ein $\beta > 0$ (da $|x - x_1| > \mu > r$ und $\Phi(x)$ fällt in $|x|$)




Squeezing von $u$:

- Für $A > 0$ sei

$$W(x) := h(x_0) + \varepsilon + A g(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$
$$V(x) := h(x_0) - \varepsilon - A g(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

z.z.: $W \in \mathcal{W}$, $V \in \mathcal{V}$ (dann $\varepsilon \to 0$)

1) $V, W \in C(\overline{\Omega})$ sind harmonisch in $\Omega$

2) wähle $A > 0$ so groß, dass $A g(x) \geq 2\|h\|_\infty$ $\forall x \in \overline{\Omega}$: $|x - x_0| \geq \delta$

z.B. $A \geq \frac{2\|h\|_\infty}{\beta}$

<u>Beh:</u> Dann $W(x) \geq h(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$

$V(x) \leq h(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$

<u>Bew:</u> a) $x \in \partial\Omega$, $|x - x_0| \geq \delta$

$\Rightarrow W(x) \geq h(x_0) + \varepsilon + 2\|h\|_\infty \geq \|h\|_\infty + \varepsilon \geq h(x) + \varepsilon$

b) $x \in \partial\Omega$, $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow W(x) = \underbrace{h(x_0) + \varepsilon}_{\geq h(x)} + \underbrace{A g(x)}_{\geq 0} \geq h(x)$

Für $V$ analog ∎

Also $w \in W(\Omega, h)$, $v \in V(\Omega, h)$.

$\Rightarrow$ die Perron-Lsg erfüllt

$$v(x) \le u(x) \le w(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$\Rightarrow \; -\varepsilon - Ag(x) \le u(x) - h(x_0) \le \varepsilon + Ag(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad |u(x) - h(x_0)| \le \varepsilon + Ag(x)$$

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} |u(x) - h(x_0)| \le \varepsilon + A \underbrace{\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} g(x)}_{\underset{g \text{ stetig}}{=} \lim g(x) = 0} = \varepsilon$$

$\varepsilon$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} |u(x) - h(x_0)| = 0$$

**Bem:** Es reicht auch die äußere Kegelbedingung. (ohne Beweis)

**Korollar 2.32:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet, $\partial\Omega$ regulär und $h \in C(\partial\Omega)$.
Dann ist die Perron-Lsg die eindeutige klass. Lsg von
$-\Delta u = 0$ in $\Omega$, $u = h$ auf $\partial\Omega$.

## 2.5. Poisson-Gleichung mit Dirichlet RB (wrap-up)

Betrachte

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \text{(PD)}$$

Bisher wurde geklärt:

1) Eindeutige Existenz klass. Lsgen für $f = 0$, falls $h \in C(\partial\Omega)$, $\Omega$ beschr. Gebiet und $\partial\Omega$ regulär. (Kor. 2.32)

2) Existenz kl. Lsgen von
$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$
für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$.

Nämlich: $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ (cf. Satz 2.5)

**Satz 2.33** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet, $\partial\Omega$ regulär, $f \in C_c^2(\Omega)$ und $h \in C(\partial\Omega)$. Dann gibt es eine eindeutige klass. Lsg von (PD).

**Bew:** 1) $v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ erfüllt $-\Delta v(x) = f(x),\ x \in \Omega,\ v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ aber nicht die Randbedingung.

2) Sei $w$ die Perron-Lsg von
$$-\Delta w(x) = 0,\quad x \in \Omega$$
$$w(x) = h(x) - v(x),\quad x \in \partial\Omega$$
$\Rightarrow w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$

Insgesamt $u := v + w$ erfüllt $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ und (PD), da
$$u(x) = v(x) + h(x) - v(x) = h(x),\quad x \in \partial\Omega$$
Eindeutigkeit: Satz 2.17. ∎

**Allgemeineres $f$:**

**Lemma 2.34** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

(i) Falls $f \in L^\infty(\Omega)$, dann gilt für $N_f(x) := \int_\Omega \Phi(x-y) f(y)\, dy$
$N_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Falls $f$ Hölder-stetig (mit Index $\alpha \in (0,1]$) auf $\Omega$, dann $N_f \in C^2(\Omega)$ und $-\Delta(N_f) = f$ in $\Omega$.

**Bew:** [Gilbarg, Trudinger, Elliptic PDEs of 2nd order, Lemma 4.1 & 4.2]

**Def:** (Hölder-Stetigkeit)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in (0,1]$. Die Funktion $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha$ auf $\Omega$, falls $\sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\alpha} < \infty$.

Satz 2.35

Satz 2.33 gilt auch mit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ Hölder-stetig auf $\Omega$.

Bew: wie bei S. 2.33, nur $v := N_f$ ∎

# 3. Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Für $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen löse

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad , \ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \qquad (1)$$

eventuell zusammen mit

Anfangsbedingung (AB): $u(x,0) = u_0(x)$, $x\in\Omega$ (2)

Randbeding. (RB): z.B. $u(x,t) = h(x,t)$, $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty)$ (3)

(Dirichlet-RB)

(1) & (2) heißt Anfangswertproblem (Cauchy-Problem)

(1), (2), (3): Anfangsrandwertproblem

## 3.1. Fundamentallösung

Betrachte

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad , \ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) \qquad (4)$$

Lemma 3.1 (Symmetrien von (4))

Für jede Lsg $u:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ von (4) ist auch

$$u_{\lambda,\eta}(x,t) := \eta\, u(\sqrt{\lambda}\,x, \lambda t)$$

eine Lsg für beliebige $\lambda>0$, $\eta\in\mathbb{R}$.

Bew: $\partial_t u_{\lambda,\eta}(x,t) = \lambda\eta\,(\partial_t u)(\sqrt{\lambda}\,x,\lambda t)$

$\partial_{x_j}^2 u_{\lambda,\eta}(x,t) = \lambda\eta\,(\partial_{x_j}^2 u)(\sqrt{\lambda}\,x,\lambda t)$