Blatt 9

Abgabe: bis Freitag 17.6.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (24 P) (Symmetriegruppen der Wärmeleitungsgleichung)
Angenommen $u(x,t)$ ist eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Zeige, dass für $\varepsilon > 0$ folgende Funktionen $u_\varepsilon(x,t)$ auch Lösungen sind:

(a) $u_\varepsilon(x,t) := u(x,t+\varepsilon), \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(b) $u_\varepsilon(x,t) := \frac{1}{(1+4\varepsilon t)^{n/2}} e^{-\varepsilon \frac{|x|^2}{1+4\varepsilon t}} u\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right), \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(c) $u_\varepsilon(x,t) := e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} u(x - 2\varepsilon t, t), \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Aufgabe 2: (35 P)
Betrachte die Lösung $u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t) u_0(y)\, \mathrm{d}y$ des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \Delta u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und mit dem Wärmeleitungskern H. Zeige:

(a) Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Falls zusätzlich $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: *(a) Zeige $|u(x,t) - u(z,t)| \to 0, t \to \infty$ für $x, z \in \mathbb{R}^n, x \neq z$. Nutze den Mittelwertsatz für den Ausdruck $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}}$.*
(b) ist viel einfacher.

Aufgabe 3: (27 P)
Sei $u_0 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkten Ableitungen bis zur Ordnung k in $\mathbb{R}^n$. Betrachte das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \Delta u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Zeige, dass für jede beschränkte Lösung und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt

$$(D_x^\alpha u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t) D^\alpha u_0(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Aufgabe 4: (14 P)
Was ist die eindeutige und für jede Zeit $t > 0$ beschränkte Lösung u des inhomogenen Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ beschränkt und $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt?
Beweise die Beschränktheit von $u(\cdot,t)$.