Blatt 4

Abgabe: bis Freitag 13.5.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (25 P) (Greensche Funktion in einer Dimension)

(a) Bestimme die Greensche Funktion zum Laplaceoperator für das Dirichletproblem auf $\Omega := (0, L) \subset \mathbb{R}$. Die Greensche Funktion $G : (0, L) \times [0, L] \to \mathbb{R}$ muss im Distributionssinne

$$\begin{aligned} -\partial_2^2 G(x, \cdot) &= \delta_x, \\ G(x, 0) = G(x, L) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \Omega$ erfüllen.

(b) Schreibe mit Hilfe von G die Lösung von

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

für $f \in C((0, L), \mathbb{R})$.

(c) Wie lautet die Lösung von $-u''(x) = f(x), \ x \in (0, L), u(0) = a, u(L) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu (a): *G ist stetig, da radialsymmetrische harmonische Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind.*

Aufgabe 2: (30 P) (Symmetrie der Greenschen Funktion für das Dirichlet-Problem)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und G die Greensche Funktion zum Laplace-Operator für das Dirichlet-Problem auf Ω, d.h. $G(x, y) = \Phi(x - y) + w(x, y)$, wobei Φ die Fundamentallösung ist und w die Korrekturfunktion mit $w(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ für alle $x \in \Omega$, $\Delta_y w(x, y) = 0$ für alle $x, y \in \Omega$, $w(x, y) = -\Phi(x - y)$ für alle $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$. Zeige, dass

$$G(x, y) = G(y, x) \text{ für alle } x, y \in \Omega, x \neq y.$$

Hinweis: Für frei gewählte $x, y \in \Omega, x \neq y$ definiere $\phi(z) := G(x, z), \psi(z) := G(y, z)$. Betrachte für ε klein genug, so dass $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset, B_\varepsilon(x) \subset \Omega, B_\varepsilon(y) \subset \Omega$, $\int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))} \psi(x) \Delta\phi(z) - \phi(z) \Delta\psi(z) \, \mathrm{d}z$ und zeige

$$0 = \int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))} \psi(z) \Delta\phi(z) - \phi(z) \Delta\psi(z) \, \mathrm{d}z \to \psi(x) - \phi(y) \quad \textit{für } \varepsilon \to 0.$$

Verwende dafür Lemma 2.3 aus der Vorlesung, sowie den Fakt (gezeigt im Beweis von Satz 2.5), dass $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x - y) \nabla\Phi(y) \cdot \nu(y) \, \mathrm{d}S(y) = -f(x)$ für $f \in C^1(\overline{B_\varepsilon(0)})$.

Aufgabe 3: (25 P) (Greensche Funktion für das Dirichletproblem auf dem Halbraum)
Bestimme die Greensche Funktion zum Laplace-Operator für das Dirichlet Problem auf dem Halbraum $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Zeige, dass die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{auf } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ mit } h \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann als

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K_H(x,y)h(y)dS(y), \quad \text{wobei } K_H(x,y) = \frac{2}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \frac{x_n}{(x_n^2 + |x' - y'|^2)^{n/2}}$$

mit $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Hinweis: *Verwende die Spiegelungsmethode mit dem Spiegelpunkt definiert als $x^* := (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Da hier der Spiegelpunkt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definiert wird, muss man nicht, wie im Fall der Kugel, den Ursprung bei der Definition der Greenschen Funktion separat behandeln. Außerdem ist keine Skalierung in der Korrekturfunktion zu verwenden, da $|x^* - y| = |x - y|$ für alle $y \in \partial\Omega$.*

Aufgabe 4: (20 P) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \Omega$. Zeige, dass dann

$$\lim_{R\to 0} \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|R^n} \int_{B_R(x_0)} u(x)\ dx = \lim_{R\to 0} \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x)\ dS(x) = u(x_0).$$