Blatt 3

Abgabe: bis Freitag 6.5.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (23P) (Zwiebelintegration)

(a) Beweise für $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{B_R(0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f(x)\,\mathrm{d}S(x)\;\mathrm{d}r.$$

Hinweis: *Schreibe die linke Seite durch eine geeignete Transformation als Integral über $B_1(0)$. Differenziere dann den Ausdruck für $\int_{B_r(0)} f(x)\,\mathrm{d}x$ in r und nutze partielle Integration zur Vereinfachung des Ausdrucks. Integriere anschließend in r von 0 bis zu R.*

(b) Zeige, dass $|\mathbb{S}^{n-1}| = n \operatorname{vol}(B_1(0))$, wobei $\mathbb{S}^{n-1}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2: (27P)
Sei $n \geq 3$ und $\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}|x|^{2-n}$ das Newton Potential. Sei $f \in C_c^2(B_r(0))$ rotationssymmetrisch und $u := \Phi * f$. Zeige, dass

$$u(x) = \Phi(x)\int_{B_r(0)} f(y)\;dy \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x| > r.$$

Hinweise:

1. *Zeige, dass u rotationssymmetrisch ist.*
2. *Nutze die Polarkoordiaten und den Fakt (cf. Vorlesung), dass für $u(x) = \tilde{u}(|x|),\quad |x| =: \tilde{r}$ gilt, dass $\Delta u(x) = \tilde{u}''(\tilde{r}) + \frac{n-1}{\tilde{r}}\tilde{u}'(\tilde{r})$.*

Aufgabe 3: (32P) (Greensche Funktion für das Neumannproblem)

Leite die Greensche Funktion G_N für das Neumannproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= h(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

her, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist und $f \in C(\Omega), h \in C(\partial\Omega)$.

Hinweis: *Schreibe $G_N(x,y) = \Phi(x,y) + w_N(x,y)$ und suche analog zum Dirichletproblem aus der Vorlesung die Korrekturfunktion w_N, so dass der Term $\int_{\partial\Omega} u(y)\nabla_y(\Phi(x-y))\cdot\nu(y)\,\mathrm{d}S(y)$ in der Greenschen Darstellung von $u(x)$ eliminiert wird.*
Dafür muss $w(x,\cdot)$ ein Neumannproblem lösen. Die natürliche Wahl $\Delta_y w(x,y) = 0$ für $x, y \in \Omega$

mit passender Neumannrandbedingung führt zu einem unlösbaren Problem, da die Kompatibilität-Bedingung (Problem 4 aus Blatt 1) nicht erfüllt wird. Verwende den Fakt, dass $\int_{\partial\Omega} -\nabla_y(\Phi(x-y)) \cdot \nu(y)\,\mathrm{d}S(y) = 1$. *Beweise diesen Fakt mit Hilfe der Greenschen Darstellung von beliebigen* $C^2(\overline{\Omega})$ *Funktionen durch die Wahl einer passenden Funktion. Um die Kompatibiltät zu erfüllen modifiziert man* $\Delta_y w(x,y) = 0$ *zu* $\Delta_y w(x,y) = c$ *mit einer passenden Wahl von* $c \in \mathbb{R}$. *Was sagt die resultierende Formel für die Lösung* u *über die Eindeutigkeit?*

Aufgabe 4: (18P) Distributionsableitungen

Bestimme die ersten Distributionsableitungen der folgenden Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$.

a) $D = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $D = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) := \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

c) $D = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \qquad u(x) = |x|.$