Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 6

Abgabe: 20.1.2014

Problem 1: Zeige, dass $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Für $p = 1$ schreibe für $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^{2n})^{-1}(1 + |x|^{2n})|f(x)|dx$$

und verwende die offensichtliche Hölder-Ungleichung.

Problem 2: Zeige, dass falls $f \in S(\mathbb{R}^n)$, dann

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\| e^{\mathrm{i}t\Delta} f - (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\tfrac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Hinweis: Die Ungleichung $|e^{\mathrm{i}\frac{|x|^2}{4t}} - 1| \leq c\frac{|x|^2}{|4t|}$ und Problem 1.

Problem 3: Aus der Dispersionsrelation

$$\omega^2 = gk_1 \tanh(k_1 h_0)$$

für ein-dimensionale Wasserwellen auf Wasser mit Tiefe h_0 leite den linearen Teil der Korteweg-de Vries Gleichung in dimensionbehafteter Form. Zur Errinerung: die KdV beschreibt Flachwasserwellen mit $|k_1 h_0| \ll 1$.

Problem 4: Betrachte folgende Kontinuum-Approximierung des FPU-Problems mit einer kleinen Nichtlinearität:

$$\partial_\tau^2 y - \partial_x^2 y = \varepsilon(\partial_x y \partial_x^2 y + \kappa \partial_x^4 y), \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Für rechts-wandernde Wellen mit einer langsamen Modulation in der Zeit, d.h. für $y(x,t) \sim \phi(x - t, \varepsilon t)$, leite eine KdV-Gleichung her als asymptotisches Modell niedrigster Ordnung.

Problem 5: Beweise, dass für $V \in C^1(\mathbb{R})$ und $e \in \mathrm{Range}(V)$ ist die Niveaumenge

$$\{(x_1, x_2) : x_2^2/2 + V(x_1) = e\}$$

eine C^1-Kurve mit der Ausnahme kritischer Punkte, d.h. Punkte (x_1, x_2) mit $V'(x_1) = 0, x_2 = 0$.

Hinweis: Satz von der impliziten Funktion.

Problem 6: Betrachte stehende Lösungen $u(x,t) = e^{-\mathrm{i}\omega t}\phi(x)$ mit reellen ω, ϕ der nichtlinearen Schrödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - \sigma|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Untersuche qualitativ die Art aller solchen Lösungen mit Hilfe der Energie-Integral-Methode. Betrachte alle Fälle der Vorzeichen von ω und σ. Wann existiert das Soliton und wann eine Frontlösung mit $\phi(x) \to \pm c$ für $x \to \pm\infty$?