Blatt 5

Abgabe: 6.1.2014

Problem 1: (Eigenschaften der Schrödinger-Gruppe) Zeige folgende Eigenschaften von $e^{\mathrm{i}t\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

(a) $\|e^{\mathrm{i}t\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(b) $e^{\mathrm{i}t\Delta} e^{\mathrm{i}s\Delta} = e^{\mathrm{i}(t+s)\Delta} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(c) $e^{\mathrm{i}0\Delta} = 1$

(d) Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fest ist die Abbildung $\Phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_f : t \mapsto \Phi_f(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta} f$ stetig. Die Stetigkeit gilt also bezüglich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm.

Problem 2: (Ivarianzen der Schrödinger-Gleichung)

Sei $u = u(x,t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass folgende Funktionen v auch $\mathrm{i}\partial_t v + \Delta v = 0, x \in \mathbb{R}^n$ erfüllen.

(a) $v(x,t) := u(x - x_0, t - t_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$

(b) $v(x,t) := u(x - 2\alpha t, t) e^{\mathrm{i}(\alpha \cdot x - |\alpha|^2 t)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$

(c) $v(x,t) := u(Ax, t)$ mit einer beliebigen orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bemerkung: (b) heißt die Galilei-Invarianz.

Problem 3: Mit Hilfe der expliziten Darstellung von $e^{\mathrm{i}t\Delta}$ zeige, dass $e^{\mathrm{i}t\Delta}$ mit der räumlichen Verschiebung kommutiert, d.h.

$$\left(e^{\mathrm{i}t\Delta} f\right)(x + x_0) = \left(e^{\mathrm{i}t\Delta} f(\cdot + x_0)\right)(x)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Für allgemeine $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ beweise das gleiche mit Hilfe der Fourier-Darstellung von $e^{\mathrm{i}t\Delta}$.

Problem 4: Zeige, dass falls $f \in S(\mathbb{R}^n)$, dann

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left\| e^{\mathrm{i}t\Delta} f - (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\tfrac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Problem 5: Zeige dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $e^{\mathrm{i}t\Delta} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwende die Eigenschaft, dass die Fourier-Transformation ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Es reicht also die Aussage in Fourier-Variablen nachzuweisen.