Blatt 4

Abgabe: 9.12.2013

Problem 1: (Erweiterung zum Problem 5 aus Blatt 3: Wellenpaketen)

(a) Zeige, dass für kleine $|\varepsilon| << 1$ und *beliebige* $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $k_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - |k_0|^2 t)}\phi(\varepsilon(x - 2k_0 t))$$

eine approximative Lösung der Schrödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u = -\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

in dem Sinne, dass

$$\mathrm{i}\partial_t v + \Delta v = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

(b) Betrachte eine skalare Gleichung

$$\partial_t u = P(\nabla)u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit einem Polynom $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Angenommen die zugehörige Dispersionsrelation $\omega = W(k)$ ist reell für reelle Wellenzahlen, zeige, dass

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - W(k_0)t)}\phi(\varepsilon(x - \nabla W(k_0)t))$$

eine approximative Lösung ist für beliebige $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $k_0 \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\partial_t v - P(\nabla)v = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

Problem 2: (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Coupled-Mode Gleichungen)

Für glatte Lösungen schreibe das System der linearen Coupled-Mode-Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v =& 0\\ \mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u =& 0\end{aligned}$$

mit $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$ um als ein System von zwei Gleichungen, wo eine Gleichung die Klein-Gordon Gleichung für u ist. Folgere die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für die Coupled-Mode Gleichungen.

Problem 3: Linearisiere (ϕ, η klein) das Wasserwellenproblem

TOMÁŠ DOHNAL
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, \qquad -h_0 < x_3 < \eta(x_1,x_2,t) && (0.1)\\ \partial_{x_3}\phi &= 0, \qquad x_3 = -h_0 && (0.2)\\ \partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta &= 0, \qquad x_3 = \eta(x_1,x_2,t) && (0.3)\\ \partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta - \partial_{x_1}\phi\partial_{x_1}\eta - \partial_{x_2}\phi\partial_{x_2}\eta &= 0, \qquad x_3 = \eta(x_1,x_2,t) && (0.4) \end{aligned}$$

mit der Notation aus der Vorlesung. Erhalte dadurch

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, \qquad -h_0 < x_3 < 0 && (0.5)\\ \partial_{x_3}\phi &= 0, \qquad x_3 = -h_0 && (0.6)\\ \partial_t\phi + g\eta &= 0, \qquad x_3 = 0 && (0.7)\\ \partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta &= 0, \qquad x_3 = 0. && (0.8) \end{aligned}$$

Problem 4: Mit Hilfe der Fourier-Transformation berechne die Lösungsformel

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi \mathrm{i} t}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{0.9}$$

für die Schrödinger Gleichung in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe der Methode der stationären Phase zeige, dass u aus (0.9) erfüllt $u(x,t) \to u_0(x)$ für $t \to 0$, falls $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{supp}(u_0)$ kompakt.

Problem 5: (Spass-Aufgabe) Betrachte Wasserwellen mit kombinierten Graviations- und Kapilareffekten, für die die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = g|k|\left(1 + \frac{T}{\rho g}|k|^2\right)\tanh(|k|h_0)$$

gilt. Zeige, dass es im Tiefwasserfall ($|k|h_0 \gg 1$) eine minimale (bezüglich $|k|$) Gruppengeschwindigkeit gibt. Berechne die minimierende Wellenzahl $|k|$. Nutze $g \approx 9.81$ m/s und die folgenden Werte für Wasser mit 15 °C:

$$\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3,\ T \approx 0.073 \text{ N/m}$$

um zu zeigen, dass die langsamste Wellen die Wellenlänge ungefähr 4.36cm haben.