Tomáš Dohnal
Lisa Helfmeier

Blatt 4

Abgabe: 14.12.2015

Problem 1: (Distributionelle Lösung der Schrödinger-Gleichung)
Zeige, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$-Funktion $u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}k\cdot x} e^{-\mathrm{i}|k|^2 t} \hat{f}(k) dk$ eine distributionelle Lösung der Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0$ ist und $\|u(\cdot,0) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Hinweis: Es definiert u eine temperierte Distribution $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Es heißt $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ eine distributionelle Lösung, falls $-\mathrm{i}u(\partial_t \phi) + u(\Delta\phi) = 0$ für alle $\phi \in S(\mathbb{R}^{n+1})$.

Problem 2: (Eigenschaften der Schrödinger-Gruppe)
Zeige folgende Eigenschaften von $e^{\mathrm{i}t\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

(a) $\|e^{\mathrm{i}t\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(b) $e^{\mathrm{i}t\Delta} e^{\mathrm{i}s\Delta} = e^{\mathrm{i}(t+s)\Delta} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(c) $e^{\mathrm{i}0\Delta} = 1$

(d) Für ein festes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $\Phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_f : t \mapsto \Phi_f(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta} f$ stetig. Die Stetigkeit gilt also bezüglich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm.

Bemerkung: Im Allgemeinen (für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$) ist hier $e^{\mathrm{i}t\Delta} f$ nur eine distributionelle Lösung.

Problem 3: (Ivarianzen der Schrödinger-Gleichung)
Sei $u = u(x,t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die folgenden Funktionen v auch $\mathrm{i}\partial_t v + \Delta v = 0, x \in \mathbb{R}^n$ erfüllen.

(a) $v(x,t) := u(x - x_0, t - t_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$

(b) $v(x,t) := u(x - 2\alpha t, t) e^{\mathrm{i}(\alpha\cdot x - |\alpha|^2 t)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$ (Galilei-Invarianz)

(c) $v(x,t) := u(Ax, t)$ mit einer beliebigen orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Problem 4: Berechne mit Hilfe der Fourier-Transformation die Lösungsformel

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi \mathrm{i}t}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \tag{0.1}$$

für die Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangsdaten $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Für die Berechnung von $\int_0^\infty e^{-\mathrm{i}ty^2} dy$ verwende den Cauchy-Integralsatz mit dem Pfad, der aus $[0,R], e^{-\mathrm{i}\pi/4}[0,R]$ und dem Kreissegment mit Radius R, der diese zwei Teile verbindet, besteht. Lass dann $R \to \infty$.

Problem 5: Zeige, dass falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\rho f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wobei $\rho(x) = 1 + |x|^2$, so ist

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left\| e^{\mathrm{i}t\Delta} f - (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\tfrac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Hinweis: Benutze (und beweise erst) die Abschätzung $|e^{\mathrm{i}\frac{|x|^2}{4t}} - 1| \leq c\frac{|x|^2}{|4t|}$.