Tomáš Dohnal
Lisa Helfmeier

Blatt 2

Abgabe: 16.11.2015

Problem 1: Was sind die Dispersionsrelationen (der linearen Teile) folgender Gleichungen?

(i) Balkengleichung: $\partial_t^2 u + a\partial_x^4 u = 0, \qquad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(ii) Kadomtsev-Petviashvili-Gl.: $\partial_{x_1}(\partial_t u + \partial_{x_1}^3 u + u\partial_{x_1} u) + \partial_{x_2}^2 u = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2$

(iii) Wärmeleitungsgleichung: $\partial_t u = \Delta u, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

(iv) Coupled-Mode-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v + (|u|^2 + 2|v|^2)u &= 0 \\ \mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u + (|v|^2 + 2|u|^2)v &= 0 \end{aligned}$$

mit $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(v) Camassa-Holm-Gleichung: $\partial_t u + 2\kappa\partial_x u - \partial_t\partial_x^2 u + 3u\partial_x u = 2\partial_x u\partial_x^2 u + u\partial_x^3 u,$
$\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

- Zeichne für (i),(iv) und (v) qualitativ die Lösung nach einer langen Zeit, falls die Anfgansdaten ein lokaliserter Impuls sind (analog zur Vorlesung).
- Welche Wellenzahlen wandern für (ii) in Richtung $(1,0)^T$ (Osten), $(-1,0)^T$ (Westen) und welche in Richtung $(-1,1)^T$ (Nord-Westen)?

Problem 2: Unter welchen Vorraussetzungen an $u_0(x)$ und $\hat{u}_0(k)$ ist die Fourier-Repräsentation der Lösung des Anfangswertproblems für die lineare Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung aus Aufgabe 1 (ii) mit $u(x,0) = u_0(x)$ eine klassische Lösung? Schreibe die Lösung mit Hilfe der Fouriertransformation explizit auf.

Problem 3: Berechne für das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Q(\partial_x)u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Asymptotik niedrigster Ordnung für $t \to \infty, \frac{x}{t} = c \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass die Dispersionsrelation

$$W''(k) = 0, W'''(k) \neq 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } W'(k) = c$$

erfüllt.

Hinweis: Verstehe den Beweis für die Methode der stationären Phase (Anhang Skript) und führe ihn für dieses spezielle Problem. Rechtfertige jede Anwendung des Lemmas B.5. Berechne das entstehende Integral der Form $\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha k^3} dk$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes. Eine Möglichkeit für das Integral über $[0, \infty)$ ist den Pfad in der komplexen Ebene zu wählen, der aus $[0, R) + \mathrm{i}0$, aus $[0, R)e^{\mathrm{i}\pi/6}$ und aus einem Kreissegment, der diese Teile verbindet, besteht. Dann läst man $R \to \infty$.

Problem 4: Betrachte die lineare Korteweg-de-Vries Gleichung

$$\partial_t u + c\partial_x u + \mu\partial_x^3 u = 0, \qquad c, \mu > 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit Anfangsdaten $u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

Was ist die Asymptotik niedrigster Ordnung von $u(x, t)$ für $t \to \infty$, $\frac{x}{t} = v$ mit

(a) $v = c$

(b) $v < c$?

Wie schnell fällt die Amplitude der Lösung ab?

Hinweis: Methode der stationären Phase.