Blatt 6

wird besprochen am: 28.06.2018

Problem 1: Linearisieren Sie das Wasserwellenproblem (für ϕ, η klein)

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.1}$$

$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.2}$$

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.3}$$

$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta - \partial_{x_1}\phi\partial_{x_1}\eta - \partial_{x_2}\phi\partial_{x_2}\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.4}$$

mit der Notation aus der Vorlesung. Erhalten Sie dadurch

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < 0 \tag{0.5}$$

$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.6}$$

$$\partial_t\phi + g\eta = 0, \qquad x_3 = 0 \tag{0.7}$$

$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta = 0, \qquad x_3 = 0. \tag{0.8}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass das Streichen der nichtlinearen Terme in System (0.1)-(0.4) nicht ausreicht. Die Gleichung ist aufgrund der von η abhängigen Randbedingungen dann noch immer nichtlinear. Definieren Sie also geeignete $\tilde{x_3}$, $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\eta}$, so dass die gewünschten Randdaten entstehen.

Problem 2: (Bloch-Transformation) Betrachten Sie für ein $L > 0$ die Bloch-Transformation in einer Dimension

$$\mathcal{T}(f)(x,k) := \tilde{f}(x,k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(k + m\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{\mathrm{i}m\frac{2\pi}{L}x}$$

und die Abbildung

$$\mathcal{T}_1\tilde{f}(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{B}} e^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}(x,k)dk, \tag{0.9}$$

wobei $\mathbb{B} := (-\pi/L, \pi/L]$. Zeigen Sie, dass für $u \in S(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{T}_1\mathcal{T}u = u$ und für $\tilde{u} \in C^\infty_{bp}(\mathbb{B}, H^s(0,L))$ mit $s \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{T}\mathcal{T}_1\tilde{u} = \tilde{u}$.

Hier ist $f \mapsto \widehat{f}$ die Fourier-Transformation und

$$C^\infty_{bp}(\mathbb{B}, H^s(0,L)) := \Big\{u : \mathbb{B} \to H^s(0,L), k \mapsto u(\cdot,k) : \exists v \in C^\infty(\mathbb{R}, H^s(0,L)) \\ \leq \text{ with } v\left(x, k + \tfrac{2\pi}{L}\right) = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}x} v\left(x,k\right), u = v|_{k\in\mathbb{B}}\Big\}.$$

Problem 3: (NLS: Erhaltungsgrößen und Blow-up) Betrachten Sie die NLS

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u + |u|^{2\sigma}u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

mit $\sigma > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass unter passenden Bedingungen für das asymptotische Verhalten von u für $|x| \to \infty$ die Größen $N(u) := \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ und $H(u) := \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{\sigma+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x$ Erhaltungsgrößen der NLS sind.

(b) Betrachten sie die Varianz $V(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u|^2\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass falls $n\sigma \geq 2$ und $H(u_0) < 0$, dann gibt es einen Zeitpunkt $t_* \in (0,\infty)$, sodass $\lim_{t\to t_*+} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$.

Hinweis für (b): Es gilt die Varianz-Identität $V'' = 8H - 4\frac{n\sigma-2}{\sigma+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x$. *Integrieren Sie diese Gleichung um zu zeigen, dass für* $n\sigma \geq 2$ *gilt* $V(t) \to 0$ *für* $t \to t_*$ *für ein* $t_* \in (0,\infty)$. *Als nächstes nutzen (und beweisen) Sie die Ungleichung* $\|f\|^2_{L^2} \leq \frac{2}{d}\|\nabla f\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}$ *um zu zeigen, dass* $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \to \infty$ *für* $t \to t_*$. *Anschliessend verwendet man (a).*

Problem 4: (Bloch-Wellen und Wellenpakete) Betrachten Sie die lineare Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - \cos^2(x/2)u = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Berechnen Sie numerich (z.B. finite Differenzen 2. Ordnung) den ersten Eigenwert $\omega_1(k)$ und die Eigenfunktion $p_1(x,k)$ vom zugehörigen Bloch-Eigenwert-Problem

$$\omega p = -(\partial_x + \mathrm{i}k)^2 p + \cos^2(x/2)p,\ x \in [0,2\pi); \quad p(2\pi) = p(0)$$

für alle k in einer Diskretisierung der halben Brillouin-Zone $[0,1/2]$.

Plotten Sie den Graphen $(k,\omega_1(k)), k \in [0,1/2]$.

Wählen Sie dann ein $k_0 \in (0,1/2)$ und zeigen Sie numerisch, dass sich ein Wellenpaket mit der Trägerwelle $p_1(x,k_0)e^{\mathrm{i}(k_0x-\omega_1(k_0)t)}$ mit der Geschwindigkeit $v_g(k_0) = \omega_1'(k_0)$ bewegt. Man wählt dafür Anfangsdaten $u(x,0)$ als das Produkt der Bloch-Welle zur Zeit $t = 0$ und einer breiten Einhüllenden. Für die numerische Lösung der Schrödinger-Gleichung verwenden Sie das Programm lin_schrod.m auf studIP.