Tomáš Dohnal

Blatt 1

wird besprochen am 19.4.2018

Problem 1: Zeigen Sie, dass die Energie $\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx$ eine Erhaltungsgröße für klassische $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$-Lösungen der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangsdaten mit kompaktem Träger ist.

Problem 2: Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α ein Multiindex. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation aus der Vorlesung:

(i) $(\partial_x^\alpha u)\hat{}(k) = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{u}(k)$

(ii) $(u * v)\hat{}(k) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(k) \hat{v}(k)$.

Problem 3: Beweisen Sie die folgenden einfachen Teile des Satzes von Paley-Wiener.
(1) *Falls* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* supp$f \subset \Omega$ *mit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt, dann ist* $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}k\cdot x} dx$ *holomorph auf* $\mathbb{C}^n$.
(2) *Falls* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* supp$(f) \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, *dann gibt es für jedes* $N \in \mathbb{N}$ *ein* $C_N > 0$, *sodass*

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C_N e^{R|\mathrm{Im}(k)|}}{(1+|k|)^N} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{C}^n.$$

Hinweis für (1): Cauchy-Riemann-Gleichungen.

Problem 4:

(i) Zeigen Sie für die Funktion $\hat{W}(k) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ mit $k \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$, dass ihre inverse Fourier-Transformation die Distribution W ist, welche definiert ist durch

$$W(\psi) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x|=ct} \psi(x) dx \qquad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^3).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\int_{|x|=ct} e^{-\mathrm{i}k\cdot x} dx = 4\pi c^2 t \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ in $\mathbb{R}^3$ (und rechnen Sie diese nach!).

(ii) Mit dem Resultat aus (i) erhalten Sie aus

$$\hat{u}(k,t) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \hat{g}(k) + \partial_t \left(\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \hat{f}(k) \right)$$

die Kirchhoffsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} g(y) dy + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} f(y) dy \right)$$

für die Lösung der Wellengleichung in 3D mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x), \partial_t u(x,0) = g(x)$. *Hinweis*: Nutzen Sie die Identität

$$\hat{T}\hat{\phi} = \widehat{T * \phi} \text{ für alle } \phi \in S(\mathbb{R}^3), T \in S'(\mathbb{R}^3),$$

wobei $(T * \phi)(x) := T(\phi(x - \cdot))$.

Problem 5: (freiwillig) Zeigen Sie, dass falls $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, dann $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap S'(\mathbb{R}^n)$ und

$$(T * \phi)\hat{} = \hat{T}\hat{\phi}, \text{ wobei } (\hat{T}\hat{\phi})(\psi) := \hat{T}(\hat{\phi}\psi) \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$