Übungsblatt 1

wird besprochen am: 30.10.2014

Problem 1: Zeige, dass für $x > 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} e^{-xt} t^{2n}$ gleichmäßig (in t) auf $(0, \infty)$ konvergiert.

Problem 2: Beweise:

1. $\tan(x) = x + o(x^2)$ für $x \to 0$ ohne die Taylor-Reihe für $\tan(x)$ explizit zu verwenden
2. $f(x) = o(x)$ $(x \to x_0 \in \mathbb{R}), f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\Rightarrow\; e^{f(x)} = 1 + o(x)$ $(x \to x_0)$ ohne Glattheitsannahmen an f
3. $a > 0,\; f(x) = O(g(x))$ auf $A \subset \mathbb{C}^n \;\Rightarrow\; |f(x)|^a = O(|g(x)|^a)$ auf A
4. $f(x) = O(\phi(x))$ auf $A \subset \mathbb{C}^n,\; g(x) = O(\psi(x))$ auf $A \;\Rightarrow\; f(x)g(x) = O(\phi(x)\psi(x))$ auf A
5. $f(x) = O(\phi(x))$ $(x \to x_0 \in \mathbb{C}^n),\; g(x) = o(\psi(x))$ $(x \to x_0) \;\Rightarrow\; f(x)g(x) = o(\phi(x)\psi(x))$ $(x \to x_0)$

Problem 3: Betrachte

$$f(z) := \sinh z^2$$

für $z \in \mathbb{C}$. Im welchen Bereich $A \subset \mathbb{C}$ ist $f(z) \sim e^{z^2}/2$ für $z \to \infty$ und im welchen Bereich ist $f(z) \sim e^{-z^2}/2$ für $z \to \infty$?

Problem 4: Ordne folgende Funktionen in eine asymptotische Folge für $\varepsilon \to 0$:

$$\sqrt{|\varepsilon|}, \log\left|\log\tfrac{1}{|\varepsilon|}\right|, 1, \sqrt{|\varepsilon|}\log\tfrac{1}{|\varepsilon|}, \varepsilon\log\tfrac{1}{|\varepsilon|}, \log\tfrac{1}{|\varepsilon|}, |\varepsilon|^{3/2}, \varepsilon^2\log\tfrac{1}{|\varepsilon|}, \sin\varepsilon, \left|\log\tfrac{1}{|\varepsilon|}\right|^{\frac{1}{10}}$$

Problem 5: Beweise die folgende Behauptung oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel:

$$(f = O(g), g = O(f) \text{ für } x \to x_0) \Rightarrow (\exists K \neq 0 : f \sim Kg \text{ für } x \to x_0).$$

Problem 6: Betrachte $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(t,x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\phi_n(x) \quad \text{für} \quad x \to x_0. \tag{0.1}$$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und sei (0.1) gleichmäßig in $t \in [a,b]$, d.h. für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ unabhängig von t, sodass $|f(t,x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\phi_n(x)| < \varepsilon|\phi_N(x)|$ für alle $t \in [a,b]$, falls $|x - x_0| < \delta$. Beweise, dass

$$\int_a^b f(t,x)dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \int_a^b f_n(t)dt \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$