Übungsblatt 7

Abgabe: 20.1.2015 bis 16 Uhr, wird besprochen am: 22.1.2015

Problem 1: Betrachte das 2D-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= -\varepsilon u(x,y) \quad \text{für} \quad x^2+y^2<1, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für} \quad x^2+y^2=1. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Finde zunächst die exakte Lösung und berechne dann mit Hilfe der regulären Störungsrechnung die Approximation $u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)$. Bestimme den Fehler durch eine direkte ε-Entwicklung der exakten Lösung.

Hinweise:

1. Zeige für die exakte Lösung, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Darstellung $\partial_{rr}u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}u$ besitzt.

2. Wegen (1) darf die folgende Gleichung genutzt werden:
$$\partial_{rr}u + \frac{1}{r}\partial_r u = -\varepsilon u, \qquad u(1)=1.$$

3. Weiter sind die Nutzung der Besselfunktion
$$J_0(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\lambda \sin(t)\right) dt$$
und der Besselgleichung hilfreich.

Problem 2: Betrachte das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} + u = \varepsilon u^2 \text{ für } t>0, \qquad u(0)=1.$$

1. Berechne die asymptotische Approximation $u_0(t)+\varepsilon u_1(t)$ der Lösung mit Hilfe der regulären Störungsrechnung für $\varepsilon \to 0$.

2. Formuliere dann die Abschätzung des Fehlers $R(t)$. Ist $R(t)=O(\varepsilon^2)$ für alle $t \geq 0$ möglich?

3. Bestimme konkrete Werte aller Konstanten in der Fehlerabschätzung nach der Wahl eines Intervalls D für die lokale Lipschitz-Stetigkeit von $f(u)=u^2$.

4. Kann man hier auch die exakte Lösung bestimmen?