Übungsblatt 6

Abgabe: 6.1.2015 bis 16 Uhr, wird besprochen am: 8.1.2015

Problem 1: Mit Hilfe der regulären Störungsrechnung berechne (bezüglich ε) die quadratische Entwicklung der Wurzeln von

$$x^3 - (4+\varepsilon)x - 2\varepsilon = 0.$$

Argumentiere mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen (für genügend glatte Funktionen), dass der Approximationsfehler tatsächlich $O(\varepsilon^3)$ ist.

Problem 2: Seien

$$u(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon^n, \quad v(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} v_n(x)\varepsilon^n$$

für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in x. Angenommen u_0 und v_0 sind beschränkt, zeige, dass

$$u(x,\varepsilon)v(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{n} u_{n-j}(x)v_j(x) \right) \varepsilon^n$$

für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in x.
Hinweis: Zeige, dass u_n, v_n beschränkt für alle n.

Problem 3: Sei $u(x;\cdot) : \varepsilon \to u(x;\varepsilon)$ (als Funktion von ε) r mal stetig differenzierbar bezüglich ε auf $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ und sei $\frac{\partial^{p+1}u}{\partial_x \partial_\varepsilon^p}(x,\varepsilon)$ stetig auf $(x,\varepsilon) \in \Omega \times [0,\varepsilon_0]$ für eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ für alle $p+1 \leq r$. Zeige, dass für die Taylor-Entwicklung in $\varepsilon = 0$ mit $N \leq r-1$

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon \to 0),$$

gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1})$$

für $x \in \Omega^\circ$.

Problem 4: Formuliere und beweise analog zu Satz 4.5 aus der Vorlesung für das Problem $u' = A(t)u + \varepsilon f(u)$ mit $A : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig eine verallgemeinerte Aussage zur Entwicklung

$$u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t).$$

Welche Gleichungen sollten u_0, u_1, u_2 lösen? Welche Voraussetzungen an f braucht man?

Frohe Weihnachten!