Übungsblatt 5

Abgabe: 16.12.2014 bis 14 Uhr, wird besprochen am: 18.12.2014

Problem 1: Berechne mit Hilfe der Methode von steepest descent eine (volle) asymptotische Entwicklung für $\lambda \to \infty$ der Besselschen Funktion

$$J_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\lambda \cos(t)) \, dt.$$

Hinweis: Nutze die gerade Symmetrie der cos Funktion und schreibe den äusseren Kosinus um mit Hilfe der Eulerschen Formel.

Problem 2: Zeige mit Hilfe der Methode von steepest descent, dass

$$\int_0^1 t^{-1/2} e^{\mathrm{i}x(t+t^2)} dt \sim e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{\mathrm{i}}{3} \frac{e^{2\mathrm{i}x}}{x} - 3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} \text{ für } x \to \infty.$$

Hinweise:

1. Der Sattelpunkt von $h(z) = \mathrm{i}(z + z^2)$ ist nicht brauchbar, weil der deformierte Integrationspfad durch das branch-cut laufen müsste.
2. Nutze die Integrationspfade mit dem steilsten Abstieg durch die Punkte $z = 0$ und $z = 1$.
3. Verwende eine Substitution, welche die Verwendung des Watson-Lemmas für die Integration entlang des Pfades des steilsten Abstiegs durch $z = 0$ ermöglicht.
4. Für die asymptotische Entwicklung der Funktion f im Watson-Lemma kann man hier nicht direkt die Taylor-Entwicklung benutzen. (Warum?) Stattdessen sollte man Lemma 1 (siehe unten) benutzen.
5. Auch für die Integration entlang des Pfades des steilsten Abstiegs durch $z = 1$ kann das Watson-Lemma benutzt werden.

Lemma 1: Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^N\right)$ für $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ und falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = c$, c Konstante, mit einem $m \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für $\alpha \geq 1 - \frac{N}{m}$

$$\Big(f(x)\Big)^\alpha = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n\right)^\alpha + o\left((x - x_0)^{N+(\alpha-1)m}\right).$$