Übungsblatt 4

Abgabe: 9.12.2014 bis 14 Uhr, wird besprochen am: 11.12.2014

Problem 1: Betrachte die lineare Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$u_t + cu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $c, \mu > 0$ und den (glatten) Anfangsdaten $u(x,0) = u_0(x)$. Berechne die Asymptotik von $u(x,t)$ für $x = ct$ und $t \to \infty$. Man sieht, dass im Vergleich zu $u(x,t)$ mit $x = vt, v < c$ und $t \to \infty$ die Amplitude langsamer abfällt. Wie schnell?

Problem 2: Berechne eine 1-Term Asymptotik der Bessel-Funktion erster Gattung

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt \quad (x \to \infty)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ fest.

Problem 3: (zu Satz 3.10 aus der Vorlesung)
Zeige, dass

$$\int_{a+\delta}^{\infty} e^{ix\frac{h^{(N)}(a)}{N!}(t-a)^N} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (|x| \to \infty)$$

für $h^{(N)}(a) \neq 0, N \geq 2, a \in \mathbb{R}, \delta > 0$

Problem 4: Zeige mit Hilfe der Methode der stationären Phase, dass

$$\int_0^1 e^{ix(-t^2+2)-t} dt \sim \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{2ix}\sqrt{\frac{i}{x}} \qquad (x \to \infty)$$