Übungsblatt 3

Abgabe: 25.11. bis 14 Uhr, wird besprochen am: 27.11.2014

Problem 1: Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Falls

$$f_1(z) \sim g_1(z) \quad (z \to z_0) \text{ und } f_2(z) \sim g_2(z) \quad (z \to z_0)$$

Dann gilt:

$$f_1(z)f_2(z) \sim g_1(z)g_2(z) \quad (z \to z_0).$$

(ii) Seien $\Phi, \Psi, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Falls

- $\Phi(z) \sim \Psi(z) \quad (z \to z_0 \text{ in } A \subset \mathbb{C})$
- $\Psi(z)$ beschränkt lokal zu z_0
- f stetig auf $\Phi\big(A \cap B_\rho(z_0)\big) \cup \Psi\big(A \cap B_\rho(z_0)\big)$ für ein $\rho > 0$ klein genug
- $\big|f\big(\Phi(z)\big)\big| \geq \lambda > 0$ lokal zu z_0

Dann gilt:

$$f\big(\Phi(z)\big) \sim f\big(\Psi(z)\big) \quad (z \to z_0 \text{ in } A).$$

Problem 2: Berechne eine 3-Term Asymptotik von

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-x\sinh(t)} t^2 dt \text{ für } x \to \infty.$$

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $F(u) = \big(\sinh^{-1}(u)\big)^2 \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(u))}$ die folgenden Werte in den ersten sechs Ableitungen in $u = 0$ hat:

$$F(0) = 0,\ F^{(1)}(0) = 0,\ F^{(2)}(0) = 2,\ F^{(3)}(0) = 0,\ F^{(4)}(0) = -20,\ F^{(5)}(0) = 0,\ F^{(6)}(0) = 518$$

Problem 3: Zeige, dass

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad (x \to \infty).$$

Hinweis: Nutze die Substitution $t = sx$ und wende die Laplace-Methode an.

Problem 4: Zeige, dass

$$\int_0^\pi t^x \sin(t)dt \sim \pi^{x+2}x^{-2} \text{ für } x \to \infty.$$

Hinweis: Nutze die Substitution $s = -\ln(t)$.