Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Übungsblatt 3

wird besprochen am: 9.11.2012

Problem 1: Berechnen Sie asymptotische Entwicklungen für folgende Integrale. Benutzen Sie die Methoden der gliederweise Integration einer Entwicklung des Integrands, die partielle Integration oder die Gamma-Funktion.

1. $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ für $x \to 0+$
2. $\int_x^\infty e^{-t^4} dt$ für $x \to \infty$
3. $\int_x^\infty e^{-t^4} dt$ für $x \to 0+$
   Hinweis: Hier wird die Gamma-Funktion nützlich sein.
4. $\int_u^\infty \cos(\theta^2) d\theta$ für $u \to \infty$ (Fresnel-Integral)
   Hinweis: Verwenden Sie ein Integral der Form $\int_x^\infty e^{it} t^{-a} dt, a > 0$.

Problem 2: Berechnen Sie eine asymptotische Entwicklung für
$I(a,\varepsilon) := \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{a}{2}x^2 - \varepsilon x^4} dx$ für $\varepsilon \to 0+$ und mit $a > 0$

Entweder integrieren Sie gliederweise eine asymptotische Entwicklung des Integrands für $\varepsilon \to 0+$ und zeigen Sie, dass das Resultat eine asymptotische Entwicklung für $I(a,\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0+$ ist.
Oder benutzen Sie das Lemma von Watson.

Problem 3: Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi t^x \sin(t) dt \sim \pi^{x+2} x^{-2} \text{ für } x \to \infty.$$