

# Analysis II

Tomáš Dohnal

tomas.dohnal@mathematik.uni-halle.de

Sommersemester 2019, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

17. September 2019

- Skript in Bearbeitung; Fehler (auch Tippfehler) melden Sie, bitte, auf meine Email-Adresse -

## Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>12 Funktionenfolgen</b>  | <b>3</b>  |
| <b>13 Potenzreihen</b>  | <b>5</b>  |
| 13.1 Taylor-Reihen . . . . .  | 6         |
| <b>14 Metrische Räume</b>   | <b>8</b>  |
| 14.1 Metrische Räume . . . . .  | 9         |
| 14.2 Normierte Räume . . . . .  | 9         |
| 14.3 Topologische Begriffe . . . . .  | 11        |
| 14.4 Kompaktheit . . . . .  | 15        |
| 14.5 Stetigkeit im metrischen Raum . . . . .  | 15        |
| 14.6 Spezielle Eigenschaften des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ . . . . .          | 17        |
| 14.6.1 Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra und Partialbruchzerlegung . . . . .     | 17        |
| <b>15 Kurven und Kurvenintegrale</b>  | <b>18</b> |
| 15.1 Kurven . . . . .   | 18        |
| 15.2 Kurvenintegrale . . . . .  | 20        |
| 15.2.1 Kurvenintegrale 1. Art . . . . .   | 20        |
| 15.2.2 Kurvenintegrale 2. Art . . . . .   | 21        |
| <b>16 Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>                           | <b>22</b> |
| 16.1 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und die (totale) Ableitung . . . . . | 22        |
| 16.2 Mittelwertsatz, Version des Hauptsatzes . . . . .                                | 27        |
| 16.3 Höhere Ableitungen, Taylor-Formel . . . . .                                      | 28        |

|   |           |
|---|-----------|
| 16.4 Lokale Extrema . . . . .                                   | 30        |
| 16.5 Inverse Funktion und Implizite Funktion . . . . .          | 31        |
| 16.6 Untermannigfaltigkeiten . . . . .                          | 33        |
| 16.7 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .            | 34        |
| <b>17 Integralrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>         | <b>35</b> |
| 17.1 Das Riemannintegral über Quader . . . . .                  | 36        |
| 17.2 Das Riemannintegral über Jordan-messbare Mengen . . . . .  | 38        |
| 17.3 Das uneigentliche Riemannintegral . . . . .                | 40        |
| 17.4 Das Riemannintegral über Normalbereiche . . . . .          | 41        |
| 17.5 Der Transformationssatz . . . . .                          | 41        |
| 17.6 Integralsätze: Satz von Gauß und Satz von Stokes . . . . . | 42        |
| 17.6.1 Satz von Gauß in der Ebene . . . . .                     | 42        |
| 17.6.2 Oberflächenintegrale in $\mathbb{R}^3$ . . . . .         | 43        |
| 17.6.3 Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ . . . . .              | 45        |
| 17.6.4 Satz von Gauß in $\mathbb{R}^3$ . . . . .                | 45        |

Dieses ist kein vollständiges Skript. Es werden in der Regel nur die Definitionen und Sätze (Aussagen) getippt. Beweise, Beispiele, Erklärungen und Kommentare werden in der Vorlesung geliefert. Bei Bedarf können diese natürlich auch in der Literatur gefunden werden.

Die Hauptreferenz dieser Vorlesung ist [2, 3]. Es werden aber viele andere Quellen benutzt, wie z.B. [1], [6], [5], [7] oder [4]. Dieses Skript folgt an mehreren Stellen dem Skript zu Analysis II von Matthias Röger, TU Dortmund.

Wir bezeichnen im ganzen Skript mit  $\mathbb{K}$  wieder den Körper der reellen oder komplexen Zahlen, also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 12 Funktionenfolgen

Es werden in der Analysis (und nicht nur da) häufig Folgen von Funktionen untersucht - typischerweise zur Approximation einer Funktion. Diese Funktion ist oft nicht explizit bekannt (z.B. die Lösung einer komplizierten Differentialgleichung) und soll gleich dem Limes der Funktionenfolge sein. Es ist dann wichtig Eigenschaften der Limesfunktion zu verstehen (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, ...). Es zeigt sich, dass die Art der Konvergenz dabei wesentlich ist.

**Definition.** Seien eine Menge  $D \subset \mathbb{K}$  und Funktionen  $f, f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegeben. Dann schreiben wir

1.  $f_n \rightarrow f$  *punktweise* für  $n \rightarrow \infty$ , falls für alle  $x \in D$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

gilt, das heißt: für alle  $x \in D$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt.

2.  $f_n \rightarrow f$  *gleichmäßig* für  $n \rightarrow \infty$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $x \in D$  und für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  ist.

**Bemerkung.** Der Unterschied von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz liegt in der Reihenfolge der Quantoren. Bei der punktweisen Konvergenz ist im Allgemeinen  $N = N(x, \varepsilon)$ , d.h.  $N$  hängt von  $\varepsilon$  und  $x$  ab. Bei der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein  $N = N(\varepsilon)$ , d.h.  $N$  ist unabhängig von  $x \in D$ !

Offensichtlich folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Konvergenz aber nicht umgekehrt.

Die gleichmäßige Konvergenz kann folgendermaßen veranschaulicht werden: Wir betrachten den “ $\varepsilon$ -Schlauch” um den Graphen von  $f$ , d.h. die Menge

$$S_{\varepsilon, f} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, |f(x) - y| < \varepsilon\}.$$

Dann gilt  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig in  $D$ , genau dann wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq N$  die Graphen von  $f_n$  innerhalb von  $S_{\varepsilon, f}$  liegen.

**Definition.** Sei  $D \subset \mathbb{K}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  beschränkt. Dann heißt

$$\|f\|_{\text{sup}} = \|f\|_{\text{sup}, D} := \sup \{|f(x)| : x \in D\}$$

*Supremumsnorm* von  $f$  (auf  $D$ ).

**Bemerkung.** Die Supremumsnorm ordnet also jeder auf  $D$  beschränkten Funktion eine nicht-negative reelle Zahl zu. Im Kapitel 14 wird der begriff einer Norm und eines normierten Raumes definiert und wir zeigen, dass beschränkte Funktionen auf  $D$  zusammen mit  $\|\cdot\|_{\text{sup}, D}$  tatsächlich ein normierter Raum ist.

Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge ist das gleiche wie die Konvergenz in der Supremumsnorm.

**Proposition 12.1** Eine Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert genau dann gleichmäßig in  $D$  gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , falls  $\|f_n - f\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Bemerkung.** Man sollte beachten, dass  $f_n$  und  $f$  nicht unbedingt beschränkt sind, aber  $f_n - f$  ist zwingend beschränkt für alle hinreichend großen  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 12.2** Seien  $D \subset \mathbb{K}$  und stetige Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegeben. Falls  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert, dann ist  $f$  stetig.

**Bemerkung.** Satz 12.2 gewährleistet, dass bei gleichmäßig konvergenten stetigen Funktionenfolgen folgende Vertauschbarkeit von Limiten gilt: Für alle  $x \in D$  ist

$$\lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y).$$

Dies folgt wegen  $\lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y)$ .

**Satz 12.3** Seien  $a < b$  und seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  stetige Funktionen, sodass die Folge  $(f_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Satz 12.4** Seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren. Falls zusätzlich die Folge der Ableitungen  $f'_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, dann ist  $f$  stetig differenzierbar auf  $[a, b]$  und es gilt

$$f' = g, \quad \text{also} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

**Bemerkung.** Sätze 12.3 und 12.4 zeigen, dass bei gleichmäßiger Konvergenz die der Limes und das Integral bzw der Limes und die Ableitung in der Reihenfolge vertauscht werden können.

**Bemerkung.** Die Aussagen der Sätze 12.2, 12.3 und 12.4 gelten nicht für allgemeine punktweise konvergente Folgen. Zum Beispiel die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \notin (-1/n, 1/n) \\ 1 - n|x|, & x \in (-1/n, 1/n) \end{cases}$$

ist eine Folge stetiger Funktionen, konvergiert aber nur punktweise und der Limes ist nicht stetig.

In der Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1/n) \\ n - 2n^2|x - 1/(2n)|, & x \in (0, 1/n) \end{cases}$$

sind alle Glieder stetig, aber die Konvergenz (gegen die Funktion  $f \equiv 0$ ) ist nicht gleichmäßig und  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ,  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1/2$  für alle  $n$ .

Letztens, die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} |x|, & 1/n \leq |x| \leq 1 \\ (n/2)x^2 + 1/(2n), & |x| \leq 1/n \end{cases}$$

ist eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, für die  $(f_n)$  auf  $(-1, 1)$  gleichmäßig gegen  $f(x) := |x|$  konvergiert, aber  $(f'_n)$  nur punktweise konvergiert. Der Limes ist keine differenzierbare Funktion.

## 13 Potenzreihen

**Definition.** Eine *Potenzreihe* in  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung der Form

$$q : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, z \mapsto q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, z \in \mathbb{K},$$

mit  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a \in \mathbb{K}$ . Jedem  $z \in \mathbb{K}$  wird also eine Reihe (konvergent oder divergent) in  $\mathbb{K}$  zugeordnet. Wir nennen  $a$  den *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe.

**Bemerkung.** 1. Potenzreihen sind Beispiele von Funktionenfolgen (wir erinnern uns dabei, dass eine Reihe eine Folge von Partialsummen ist, siehe Kapitel 5).  
2. Durch die Variablentransformation  $w = z - a$  können wir jede Potenzreihe umschreiben mit Hilfe einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0:

$$q(z) = p(z - a), \quad p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k.$$

$p$  ist also eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Wir dürfen uns also o.B.d.A. im Folgenden auf Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0 beschränken.

3. Eine Potenzreihe  $p$  in  $\mathbb{K}$ ,  $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , ist formaler Limes der Funktionenfolge  $(p_n)_n$ ,

$$p_n : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad p_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k.$$

Es ist zunächst nicht klar ob und für welche  $z \in \mathbb{K}$  die Reihe  $p(z)$  konvergiert und daher, auf welcher Teilmenge von  $\mathbb{K}$  die Potenzreihe eine  $\mathbb{K}$ -wertige Funktion definiert. Wir werden im Folgenden den Konvergenzbereich charakterisieren und zeigen, dass er immer eine Kreisscheibe ist.

**Satz 13.1** Sei  $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K}$ ,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z \in \mathbb{K}$$

und sei

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0, \infty].$$

Dann gilt:

1. Die Potenzreihe  $p$  ist absolut konvergent für alle  $z \in B(0, R) := \{z \in \mathbb{K} : |z| < R\}$  (das heißt  $p(z)$  konvergiert absolut für  $|z| < R$ ) und divergent für alle  $z \in \mathbb{K}$  mit  $|z| > R$ .
2. Die Potenzreihe  $p$  ist für alle  $0 < r < R$  gleichmäßig konvergent auf  $\overline{B(0, r)} := \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq r\}$  (das heißt  $(p_n)_n$  konvergiert gleichmäßig auf  $\overline{B(0, r)}$ ).
3. Die Potenzreihe  $p$  ist stetig in  $B(0, R)$ .

Wir sehen also, dass eine Potenzreihe immer auf einer ganzen Kreisscheibe konvergiert und die folgende Definition macht also Sinn.

**Definition.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K}$ . Dann heißt

$$\sup\{|z-a| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert}\}$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

**Bemerkung.** Offenbar konvergiert  $c_k(z-a)^k$  für alle  $|z-a| < R$  genau dann, wenn  $c_k z^k$  für alle  $|z| < R$  konvergiert. Der Konvergenzradius hängt also nicht vom Entwicklungspunkt ab.

Satz 13.1 zeigt, dass  $(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|})^{-1}$  der Konvergenzradius ist.

**Satz 13.2** Sei  $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K}$ , die für ein  $z_* \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  konvergiert. Falls  $p(z_j) = 0$  für eine Folge  $(z_j)_j \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$  mit  $z_j \rightarrow 0$ , dann gilt  $c_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , also  $p \equiv 0$ .

**Korollar 13.3 (Identitätssatz für Potenzreihen)** Seien

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

zwei Potenzreihen in  $\mathbb{K}$  mit jeweils positivem Konvergenzradius. Falls 0 ein Häufungspunkt der Menge  $\{z \in \mathbb{K} : p(z) = q(z)\}$  ist, dann gilt  $c_k = d_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , also  $p \equiv q$ .

**Satz 13.4** Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $p$  stetig differenzierbar auf  $(-R, R)$  und es gilt für alle  $-R < x < R$

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

**Korollar 13.5** Eine Potenzreihe  $p$  wie in Satz 13.4 ist in  $(-R, R)$  unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$c_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

**Beispiel.** Als Anwendung von Satz 13.4 (und vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) zeigt man, dass

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

für alle  $x \in (-1, 1)$ .

## 13.1 Taylor-Reihen

In diesem Abschnitt steht  $I$  für ein reelles Intervall mit mehr als einem Punkt.

Der folgende Satz beschreibt die Darstellung einer Funktion durch sogenannte Taylorpolynome und einen Fehlerterm. Der Fehlerterm kann in unterschiedlichen Formen ausgedrückt werden. Im Satz 13.6 steht die *Integralform* und die *Lagrangesche Form* des Fehlertermes.

**Satz 13.6** Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x_0 \in I$  (s.g. Entwicklungspunkt). Dann gilt für alle  $x \in I$

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

und

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{Integralform}).$$

Der Fehlerterm, kann auch anhand der *Lagrangeschen Form* geschrieben werden:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_1)(x - x_0)^{n+1} \quad (\text{Lagrangesche Form})$$

für ein  $x_1$  zwischen  $x_0$  und  $x$  (d.h.  $x_1 \in [x_0, x]$  falls  $x_0 \leq x$  und  $x_1 \in [x, x_0]$ , falls  $x_0 \geq x$ ).

$T_n[f, x_0] : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt das  $n$ -ten *Taylorpolynom* zu  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ .

**Bemerkung.** Für  $x$  nah an  $x_0$  fällt der Betrag der Summanden eines Taylorpolynoms für wachsenden Index  $k$  ab. Der Betrag des Fehlertermes ist noch um eine  $(x - x_0)$ -Potenz kleiner als der kleinste Summand des Taylorpolynoms. Die nächste Proposition zeigt, dass der Fehlerterm auch dann klein ist, wenn die Funktion  $f$  nur  $n$ -mal stetig differenzierbar ist. Nur muss er nicht um eine ganze  $(x - x_0)$ -Potenz kleiner sein.

**Korollar 13.7** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert für alle  $x_0 \in I$  eine stetige Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x_0) = 0$ , sodass

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \varphi(x)(x - x_0)^n \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei  $T_n[f, x_0]$  das  $n$ -te Taylorpolynom in  $x_0$  ist.

**Korollar 13.8** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ , sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion mit  $f^{(n+1)}(x) = 0$  für alle  $x \in I$ . Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .

**Bemerkung.** Also, jede Funktion, deren  $n$ -te Ableitung identisch verschwindet ist ein Polynom.

Falls  $f$  unendlich oft differenzierbar ist, so erhalten wir aus  $T_n$  eine Reihe (die *Taylorreihe*) als formalen Limes. Es stellt sich dann die Frage, ob und in welchen Punkten  $x$  diese Reihe konvergiert und ob der Limes mit der Funktion  $f$  übereinstimmt.

**Definition.** Sei  $I = (a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$  und  $f \in C^\infty(I)$ . Dann heißt die Potenzreihe  $T[f, x_0] : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

*Taylorreihe* von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Falls ein  $\delta > 0$  existiert, sodass  $T[f, x_0]$  auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  konvergiert und mit  $f$  übereinstimmt, so nennen wir  $f$  *reell analytisch* in  $x_0$ .

**Satz 13.9** Sei  $f \in C^\infty((a, b))$ , sodass ein  $M > 0$  existiert mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, x \in (a, b).$$

Dann ist  $f$  reell analytisch auf  $(a, b)$ , das heißt  $f$  ist reell analytisch in jedem  $x_0 \in (a, b)$ .

**Bemerkung.** Nicht jede  $C^\infty$ -Funktion ist auch reell analytisch! Ein solches Beispiel ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Dies Funktion ist  $C^\infty(\mathbb{R})$  und  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Also verschwindet die Taylorreihe  $T[f, 0]$  identisch. Offensichtlich ist die Taylorreihe also gleich  $f$  auf keinem Intervall  $(-a, a), a > 0$ .

**Satz 13.10** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann ist die Taylorreihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$  gleich  $f$  auf  $(a-r, a+r)$ , also

$$T[f, a](x) = f(x) \quad \forall x \in (a-r, a+r).$$

**Bemerkung.** Wir wissen anhand Satzes 13.10, dass die im ersten Teil von Abschnitt 13 gefundene Potenzreihendarstellung von  $\log(1+x)$  die **Taylorreihe** ist. Damit haben wir die **Taylorreihe für den Logarithmus** gefunden:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Die Identität gilt sogar für  $x = 1$ . Dies kann mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes bewiesen werden [2].

Durch die Identität  $\log(x) = \log(a) + \log(1 + \frac{x-a}{a})$  mit einem beliebigen  $a > 0$  folgt

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n} (x-a)^n \quad \forall x \in (0, 2a).$$

Der Logarithmus ist also reell analytisch auf  $(0, \infty)$ .

**Satz 13.11 (Taylorreihe für den Arcus-Tangens)** Für alle  $x \in (-1, 1)$  gilt

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Bemerkung.** Die Identität gilt auch für  $x = \pm 1$ . Dies kann wieder mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes bewiesen werden [2]. Der Arcus-Tangens ist also reell analytisch auf  $(-1, 1)$ .

**Satz 13.12 (Weierstraßscher Approximationssatz)** Jede auf einem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kann gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein Polynom  $p$ , sodass

$$\|f - p\|_{\sup, [a, b]} \leq \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Im Vergleich zu Satz 13.6 braucht der Weierstraßscher Approximationssatz keine Differenzierbarkeit der Funktion  $f$ . Die approximierenden Polynome im Weierstraßschen Approximationssatz sind aber nicht explizit bekannt. Man weiß nur, dass sie existieren.

## 14 Metrische Räume

In diesem Kapitel werden wir die Grundlage für die mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  schaffen. Der euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  ist ein Beispiel von normierten Räumen. Normierte Räume sind dann spezielle metrische Räume. Wir werden also erst manche Begriffe aus der Analysis in  $\mathbb{R}$  auf allgemeine metrische Räume übertragen.

## 14.1 Metrische Räume

**Definition.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine *Metrik* (Abstandsfunktion) auf  $X$  ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , sodass:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in X, \quad \text{und } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, && \text{(positiv definit)} \\d(x, y) &= d(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in X, && \text{(symmetrisch)} \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{für alle } x, y, z \in X. && \text{(Dreiecks-Ungleichung)}\end{aligned}$$

$(X, d)$  heißt dann *metrischer Raum*.

**Definition.** Die Menge  $\mathbb{R}^n$  aller  $n$ -Tupel reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$$

heißt der ( $n$ -dimensionale) *euklidische Raum*.

Die Abbildung  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(x, y) := \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n$$

heißt das *euklidische Skalarprodukt*.

Die Abbildung  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$  heißt die *euklidische Norm*.

**Bemerkung.** Für  $n = 1$  ist die euklidische Norm gleich dem Betrag,  $\|x\|_2 = |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 14.1 (Cauchy–Schwarz–Ungleichung)** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

**Proposition 14.2** Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  gegeben durch  $d(x, y) := \|x - y\|_2$ . Dann ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

**Bemerkung.** Auch beliebige Teilmengen von  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  und  $\mathbb{Q}$  mit dem Abstand  $d(z, w) := |z - w|$  sind metrische Räume.

## 14.2 Normierte Räume

Normierte Räume sind spezielle metrische Räume. Genauer gesagt kann aus jeder Norm eine Metrik und somit aus jedem normierten Raum ein metrischer Raum konstruiert werden. Bei normierten Räumen muss die unterliegende Menge  $X$  ein Vektorraum sein und eine Metrik induziert durch eine Norm erfüllt mehrere Eigenschaften als eine allgemeine Metrik.

**Definition.** Seien ein Körper  $\mathbb{K}$ , eine nicht-leere Menge  $V$  und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned}+ : V \times V &\rightarrow V, & (x, y) &\mapsto x + y, && \text{Addition} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V, & (\lambda, x) &\mapsto \lambda x && \text{Skalarmultiplikation}\end{aligned}$$

gegeben. Dann heißt  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (oder „Vektorraum über  $\mathbb{K}$ “), wenn für alle  $x, y, z \in V$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt:

$$x + y = y + x. \tag{V.1}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z). \tag{V.2}$$

$$\text{Es existiert ein Element } 0 \in V \text{ mit } x + 0 = x \quad \forall x \in V. \tag{V.3}$$

$$\text{Es existiert genau ein Element } -x \text{ mit } x + (-x) = 0. \tag{V.4}$$

$$1x = x, \quad \text{wobei } 1 \in \mathbb{K} \text{ das neutrale Element bzgl. der Multiplikation in } \mathbb{K}. \tag{V.5}$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x. \tag{V.6}$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y. \tag{V.7}$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x. \tag{V.8}$$

**Beispiel.** 1. In  $\mathbb{R}^n$  definieren wir die Addition  $+$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$x + w := (x_1 + w_1, x_2 + w_2, \dots, x_n + w_n) \quad \text{für } x, w \in \mathbb{R}^n,$$

und die Skalarmultiplikation  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit diesen Verknüpfungen ist  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. Der Nullvektor in  $\mathbb{R}^n$  und das inverse Element  $-x$  zu  $x \in \mathbb{R}^n$  sind gegeben durch

$$0 := (0, 0, \dots, 0), \quad -x := (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

2. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und sei für zwei Funktionen  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und für reelle Zahlen  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Addition  $f + g$  und Skalarmultiplikation  $\lambda f$  jeweils punktweise erklärt. Dann sind mit diesen Verknüpfungen die folgenden Mengen von Funktionen

$$\mathcal{B}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt auf } I\},$$

$$C^0(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\},$$

$$C^k(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{R}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist integrierbar über } I\}$$

jeweils Vektorräume über  $\mathbb{R}$ .

**Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty) \quad v \mapsto \|v\|,$$

sodass gilt:

$$\|v\| \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V, \quad \text{und} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \tag{positiv-definit}$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}, v \in V, \tag{absolut homogen}$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V. \tag{Dreiecksungleichung}$$

$(V, \|\cdot\|)$  heißt dann ein *normierter Raum*.

**Bemerkung.** 1. Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass für alle  $u, v \in V$  gilt:

$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\| \quad \text{und} \quad \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|.$$

2. Für einen beliebigen normierten Raum  $(V, \|\cdot\|)$  und eine beliebige Teilmenge  $X \subset V$  ist  $(V, d)$  mit  $d(x, y) := \|x - y\|$  ein metrischer Raum.

**Beispiel.** 1. Die „euklidische Norm“ ist tatsächlich eine Norm. Insbesondere sind  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  und  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ , also die reellen bzw. komplexen Zahlen mit dem Betrag in  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  normierte Räume.

2. Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Dann ist die Supremumsnorm  $\|\cdot\|_{\text{sup}, I}$  eine Norm auf den Vektorräumen  $\mathcal{B}(I)$ ,  $C^0(I)$  und  $C^k(I)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir kontrollieren hier dafür die Dreiecksungleichung und überlassen den Rest der Leserin.

$$\|f + g\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in I} (|f(x)| + |g(x)|) = \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}},$$

wobei wir die Dreiecksungleichung in  $\mathbb{R}$  benutzt haben.

### 14.3 Topologische Begriffe

Obwohl wir, anders als in [3], so genannte topologische Räume nicht ausführlich besprechen werden, brauchen wir manche topologische Begriffe. Vor allem sind es offene Mengen, abgeschlossene Mengen und der Rand einer Menge. Vieles aus der Analysis lässt sich in topologischen Räumen betrachten. Wir verbleiben aber weniger allgemein und arbeiten in metrischen Räumen oder sogar in normierten Räumen und später meistens nur in  $\mathbb{R}^n$ .

In diesem Abschnitt ist  $(X, d)$  immer ein metrischer Raum.

**Definition.** 1. Der *offene Ball* um  $x_0 \in X$  mit Radius  $R > 0$  ist gegeben durch

$$B(x_0, R) := \{x \in X : d(x, x_0) < R\}.$$

2. Sei  $S \subset X$  nichtleer. Dann heißt  $S$  *beschränkt*, falls  $x_0 \in S$  und  $R > 0$  existieren, sodass

$$S \subset B(x_0, R).$$

**Proposition 14.3** 1. Eine Menge  $S \subset X$  ist genau dann beschränkt, wenn für jedes  $x_1 \in X$  ein  $R_1 > 0$  existiert mit  $S \subset B(x_1, R_1)$ .

2. Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $X \subset V$  und  $d$  die Metrik  $d(x, y) := \|x - y\|$ . Dann ist eine Teilmenge  $S \subset X$  genau dann beschränkt, wenn ein  $M > 0$  existiert, sodass

$$\|x\| < M \quad \text{für alle } x \in S.$$

**Definition.** Sei  $S \subset X$  beliebig.

1. Das *Innere* von  $S$  ist gegeben durch

$$\overset{\circ}{S} := \text{int} S := \{x \in S : \text{es gibt } r > 0 \text{ mit } B(x, r) \subset S\}.$$

2. Der *Rand* von  $S$  ist gegeben durch

$$\partial S := \{x \in X : \text{für alle } r > 0 \text{ gilt } B(x, r) \cap S \neq \emptyset \text{ und } B(x, r) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}.$$

3. Der *Abschluss* von  $S$  ist gegeben durch

$$\bar{S} := S \cup \partial S.$$

4.  $S$  heißt *offen*, falls  $S = \overset{\circ}{S}$ , und *abgeschlossen*, falls  $S = \bar{S}$ .

**Bemerkung.** 1. Eine Menge  $S \subset X$  ist also genau dann offen, wenn für alle  $x \in S$  ein  $r > 0$  existiert mit  $B(x, r) \subset S$ .

2. Die Mengen  $S = X$  und  $S = \emptyset$  sind beide sowohl offen als auch abgeschlossen!

3. Es gilt  $\partial X = \partial \emptyset = \emptyset$ .

4. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  einer der Intervalle  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  und  $(a, b)$  für  $a \leq b$ . Dann ist immer

$$\overset{\circ}{I} = (a, b), \quad \partial I = \{a, b\}, \quad \bar{I} = [a, b].$$

Also ist  $(a, b)$  offen, und  $[a, b]$  abgeschlossen. Halboffene Intervalle  $(a, b]$  und  $[a, b)$  sind weder offen noch abgeschlossen. Intervalle  $(-\infty, a)$  und  $(a, \infty)$  sind offen und  $(-\infty, a]$ ,  $[a, \infty)$  sind abgeschlossen.

**Proposition 14.4** Für beliebige  $x_0 \in X$  und  $R > 0$  ist die Menge  $B(x_0, R)$  offen.

**Proposition 14.5** Seien  $A \subset X$  und  $B \subset X$  beliebig. Dann gilt:

(i)  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ ,

(ii)  $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$ ,

(iii)  $A \setminus \overset{\circ}{A} \subset \partial A$ ,

(iv)  $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ ,

(v)  $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$ ,

(vi)  $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $X \setminus A$  offen ist,

(vii)  $\overset{\circ}{A}$  ist offen,

(viii)  $\bar{A}$  ist abgeschlossen.

**Satz 14.6** Sei  $X$  metrischer Raum und sei  $\mathcal{T}$  die Menge aller offenen Teilmengen von  $X$ . Dann gilt

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

2. Falls  $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ , so ist auch  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ .

3. Falls  $I$  eine beliebige Indexmenge (endlich, abzählbar oder überabzählbar) und falls für alle  $i \in I$  eine Menge  $A_i \in \mathcal{T}$  gegeben ist, so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}.$$

4. Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  mit

$$x \in U, y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

**Bemerkung.** 1. Nach Satz 14.6 (ii) sind endliche Schnitte offener Mengen offen.

2. Ein Schnitt unendlich vieler offener Mengen muss nicht offen sein: Ein Beispiel sind die offenen Mengen  $A_i := (-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}), i \in \mathbb{N}$ . Es ist dann

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}\right) = [0, 1] \quad \text{abgeschlossen.}$$

3. Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen: Seien  $B_i, i \in I$  abgeschlossene Mengen, wobei  $I$  eine beliebige Indexmenge ist. Dann gilt

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \left(X \setminus \bigcap_{i \in I} B_i\right) \text{ offen} \Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} (X \setminus B_i) \text{ offen.}$$

Das letzte gilt dann nach Satz 14.6 (iii).

4. Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.  
5.  $\partial A$  ist immer abgeschlossen.

**Bemerkung.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  ein System von Teilmengen von  $X$ , die alle Eigenschaften (i)-(iii) von Satz 14.6 erfüllen. Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  ein *topologischer Raum* und  $\mathcal{T}$  eine *Topologie* auf  $X$ . Zum Beispiel, Konvergenz und Stetigkeit machen auch in topologischen Räumen (d.h. auch ohne eine Metrik) Sinn, siehe §1[3]. Wir verbleiben aber in metrischen Räumen.

Satz 14.6 zeigt, dass ein metrischer Raum mit dem System  $\mathcal{T}$  von offenen Teilmengen ein topologischer Raum ist.

**Proposition 14.7** 1. Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und seien  $x_0 \in X, R > 0$  beliebig. Dann gelten:

$$\partial B(x_0, R) \subset \{x \in X : d(x, x_0) = R\}, \quad \overline{B(x_0, R)} \subset \{x \in X : d(x, x_0) \leq R\}.$$

2. Sei  $(V, \|\cdot\|)$  normierter Raum, seien  $x_0 \in V, R > 0$ . Dann gelten

$$\partial B(x_0, R) = \{x \in X : \|x - x_0\| = R\}, \quad \overline{B(x_0, R)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\}.$$

**Bemerkung.** Gleichheit im ersten Teil von Proposition 14.7 gilt im Allgemeinen nicht. Als Beispiel nehmen wir den metrischen Raum  $X = \{0, 1\}$  mit  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $d(0, 1) = d(1, 0) = 1, d(0, 0) = d(1, 1) = 0$ . Es gilt

$$B(0, 1) = \{0\}, \quad \partial B(0, 1) = \emptyset, \quad \{x \in X : d(x, 0) = 1\} = \{1\}.$$

**Definition.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum.

1. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  heißt *konvergent gegen*  $x \in X$  (wir schreiben  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), falls

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  heißt *beschränkt*, falls ein  $x \in X$  und ein  $R > 0$  existieren mit

$$d(x_n, x) \leq R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  heißt *Cauchyfolge*, falls

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

4.  $(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in  $X$  konvergiert.

5. Wir nennen  $x \in X$  *Häufungspunkt* der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $j \in \mathbb{N}$  existiert mit  $j > N$  und  $d(x_j, x) < \varepsilon$ .

6. Sei  $A \subset X$ . Punkt  $x_0 \in X$  heißt Häufungspunkt von  $A$ , falls eine Folge  $(x_n)_n$  in  $A \setminus \{x_0\}$  existiert mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
7. Eine Menge  $U \subset X$  heißt *Umgebung* von  $x_0 \in X$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  mit  $d(x, x_0) < \varepsilon$  die Eigenschaft  $x \in U$  erfüllt ist.

**Satz 14.8** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann gilt

1. Jede Folge in  $X$  hat höchstens einen Grenzwert.
2. Konvergente Folgen sind beschränkt.
3. Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen.

**Definition.** Eine Folge  $(x_n)_n$  in einem normierten Raum heißt konvergent/ beschränkt/ Cauchyfolge/ besitzt einen Häufungspunkt, wenn die entsprechende Eigenschaft bezüglich der induzierten Metrik ( $d(x, y) := \|x - y\|$ ) gilt. Ein normierter Raum heißt vollständig, wenn der induzierte metrische Raum vollständig ist.

**Bemerkung.** Analog zu Folgen in  $\mathbb{R}$  beweist man die üblichen Rechenregeln für Folgen im normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$ . Falls  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  konvergent gegen  $x \in V$  bzw.  $y \in V$  sind und falls  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  gegen  $\alpha \in \mathbb{K}$  konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Natürlich gibt es keine Aussage über  $x_n y_n$ , weil dieses Produkt im allgemeinen Vektorraum nicht definiert ist.

**Satz 14.9** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $A \subset X$ . Dann sind äquivalent:

1.  $x \in \overline{A}$ .
2. Es existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) in  $X$ .

Weiterhin sind äquivalent:

3.  $A$  ist abgeschlossen.
4. Falls  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  und  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) in  $X$ , dann gilt  $x \in A$ .

**Bemerkung.** Der erste Teil von Satz 14.9 sagt, dass der Abschluss einer Menge  $A$  aus  $A$  und aus allen Häufungspunkten von  $A$  besteht.

**Beispiel.** Man kann mit Hilfe von Satz 14.9 zeigen, dass die Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2 \right\}$$

mit  $a, b, r > 0$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  (mit der euklidischen Metrik) abgeschlossen ist.

**Proposition 14.10** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $(x_n)_n$  eine Folge in  $X$  und  $x \in X$ . Dann sind äquivalent:

1.  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

2. Für alle  $U \subset X$  offen mit  $x \in U$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$ .

**Definition.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *dicht* (in  $X$ ), falls  $\bar{A} = X$ .

**Beispiel.**  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ .

## 14.4 Kompaktheit

Kompakte Mengen in einem metrischen Raum sind, grob gesagt, die Mengen, auf den stetige Funktionen die gleichen schönen Eigenschaften wie stetige Funktionen auf kompakten Intervallen  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  haben.

**Definition.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und  $K \subset X$ .

1.  $K$  heißt (überdeckungs-) *kompakt*, falls für jede offene Überdeckung von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung existiert. Das heißt, falls aus

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad I \text{ beliebige Indexmenge, } U_i \text{ offen für alle } i \in I,$$

folgt, dass  $N \in \mathbb{N}$  und  $i(1), \dots, i(N) \in I$  existieren, sodass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{i(j)}.$$

2.  $K$  heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in  $K$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge (also einen Häufungspunkt in  $K$ ) besitzt.

**Satz 14.11** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $K \subset X$  überdeckungskompakt. Dann ist  $K$  auch folgenkompakt.

**Bemerkung.** 1. Es gilt in allgemeinen metrischen Räumen sogar die Äquivalenz der zwei Kompaktheitsbegriffe, siehe Satz 10.9 in [5].

2. Satz 14.11 sagt also dass jede Folge  $(x_j)_j$  in einer kompakten Menge  $K$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge enthält. Das ist sehr ähnlich dem Satz von *Bolzano-Weierstraß* in  $\mathbb{R}$ , wo aber die Beschränktheit der Folge reicht. Allgemeine beschränkte Folgen in metrischen Räumen (oder in normierten Räumen) müssen keine konvergente Teilfolge besitzen - Kompaktheit ist hier wichtig! Allerdings reicht die Beschränktheit in allen endlich dimensionalen Räumen. In  $\mathbb{R}^n$  behauptet dies Satz 14.20.

**Proposition 14.12** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Jede folgenkompakte Teilmenge  $K \subset X$  ist abgeschlossen und beschränkt.

**Bemerkung.** Es gibt abgeschlossene, beschränkte Mengen, die nicht folgenkompakt (oder kompakt) sind. Diese Mengen existieren aber nur in unendlich dimensionalen metrischen Räumen, wie z.B. in  $l^1$  (Raum aller absolut summierbarer Folgen). Solche Räume untersucht man in der Funktionalanalysis.

**Proposition 14.13** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subset X$  kompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset K$  ist auch kompakt.

## 14.5 Stetigkeit im metrischen Raum

**Definition.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

1.  $f$  heißt in einem Punkt  $x_0 \in X$  *stetig*, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$\text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta : \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

2.  $f$  heißt *stetig auf*  $S \subset X$ , falls  $f$  in jedem  $x_0 \in S$  stetig ist.

3.  $f$  heißt *Lipschitz-stetig*, falls ein  $L > 0$  existiert mit

$$d_Y(f(x), f(z)) \leq L d_X(x, z) \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

**Satz 14.14** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $x_0 \in X$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0$  stetig, wenn für alle Folgen  $(x_k)_k$  in  $X$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  in  $X$  gilt

$$f(x_k) \rightarrow f(x_0) \text{ in } Y.$$

**Definition. (Grenzwert einer Funktion)** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $A \subset X$ , sei  $x_0 \in X$  Häufungspunkt von  $A$  und sei  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $y_0 \in Y$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

falls für jede Folge  $(x_k)_k$  in  $A \setminus \{x_0\}$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt, dass  $f(x_k) \rightarrow y_0$  in  $Y$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Satz 14.15** Seien  $X$  und  $Y$  zwei metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge  $V \subset Y$  die Urbildmenge  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist.

**Korollar 14.16** Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen. Dann ist auch die Komposition

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

stetig.

**Bemerkung.** 1. Die Stetigkeit von  $f : X \rightarrow Y$  ist äquivalent auch dazu, dass für jede *abgeschlossene* Menge  $V \subset Y$  die Urbildmenge  $f^{-1}(V)$  *abgeschlossen* in  $X$  ist.

2. Es gilt *nicht*, dass stetige Funktionen offene Mengen in offene Mengen abbilden. Ein Beispiel sind konstanten Funktionen in  $\mathbb{R}$ . Auch abgeschlossene Mengen werden im Allgemeinen nicht auf abgeschlossene Mengen abgebildet. Ein Beispiel ist  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei das Bild von  $\mathbb{R}$  das offene Intervall  $(0, \infty)$  ist.

Die gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen zwischen metrischen Räumen und die punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Funktionen zwischen metrischen Räumen werden analog zum  $\mathbb{R}$ -Fall definiert.

**Definition.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume.

1. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $x, x_0 \in X$  mit  $d_X(x, x_0) < \delta$  gilt, dass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

2. Seien  $f_j, f : X \rightarrow Y$ ,  $j \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann sagen wir,  $f_j$  konvergiert gegen  $f$  *punktweise* für  $j \rightarrow \infty$ , falls für alle  $x \in X$

$$d_Y(f_j(x), f(x)) \rightarrow 0 \text{ (} j \rightarrow \infty \text{)}.$$

Wir sagen,  $f_j$  konvergiert *gleichmäßig* gegen  $f$  für  $j \rightarrow \infty$ , falls

$$\sup_{x \in X} d_Y(f_j(x), f(x)) \rightarrow 0 \text{ (} j \rightarrow \infty \text{)}.$$

Genauso wie bei Funktionen in  $\mathbb{R}$  überträgt sich bei gleichmäßiger Konvergenz einer Folge von stetigen Funktionen die Stetigkeit auch an den Limes. Und der Beweis ist auch komplett analog.

**Satz 14.17** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Falls  $f_j : X \rightarrow Y$  stetig ist für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $f_j \rightarrow f$  ( $j \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig konvergiert, so ist  $f$  stetig.

Wie wir in Analysis I gesehen haben, haben stetige reellwertige Funktionen auf einem kompakten Intervall ihr Maximum und Minimum und sie sind gleichmäßig stetig. Das gleiche gilt, wenn das Intervall durch eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ersetzt wird.

**Satz 14.18** Sei  $K \subset X$  kompakt und sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

1.  $f(K)$  ist kompakt.
2. Das Maximum und Minimum von  $f$  werden angenommen.

**Satz 14.19** Sei  $K \subset X$  kompakt und  $f : K \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

## 14.6 Spezielle Eigenschaften des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt arbeiten wir im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik  $d(x, y) := \|x - y\|_2$ .

**Bemerkung.** Es ist einfach folgende zwei Aussagen nachzuweisen.

1. Die Konvergenz einer Folge von Punkten in  $\mathbb{R}^n$  ist äquivalent dazu, dass für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  die Folge der  $k$ -ten Komponenten in  $\mathbb{R}$  konvergiert.
2. Die Stetigkeit von  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist äquivalent zur Stetigkeit von allen Komponenten  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt in  $\mathbb{R}^n$  genauso wie in  $\mathbb{R}$ , d.h. für alle beschränkte Folgen. Es ist eine Folgerung aus Satz 14.11 und der Kompaktheit jedes Quaders  $[-L, L]^n$ , siehe Satz 3.2 in [3].

**Satz 14.20 (Bolzano-Weierstraß)** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Satz 14.21 (Heine-Borel)** Für  $K \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

1.  $K$  ist kompakt.
2.  $K$  ist folgenkompakt.
3.  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt.

### 14.6.1 Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra und Partialbruchzerlegung

Mit Hilfe von Satz 14.18 kann man den Fundamentalsatz der Algebra beweisen.

**Satz 14.22 (Fundamentalsatz der Algebra)** Sei  $n \geq 1$  und  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, P(z) := \sum_{k=0}^n c_k z^k$  (mit  $c_k \in \mathbb{C}, k = 0, \dots, n, c_n \neq 0$ ) ein Polynom von Grad  $n$ . Dann hat  $P$  mindestens eine Nullstelle, d.h. es gibt ein  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sodass  $P(z_0) = 0$ .

**Korollar 14.23** Jedes Polynom  $\mathbb{N} \ni n$ -ten Grades,  $P(z) := \sum_{k=0}^n c_k z^k$ , mit komplexen Koeffizienten lässt sich in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen:

$$P(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

wobei  $z_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n$ .

**Bemerkung.** In Korollar 14.23 müssen die Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  natürlich nicht unterschiedlich sein. Bei  $1 \leq r \leq n$  unterschiedlichen Nullstellen mit Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_r$  kann man  $P$  schreiben als

$$P(z) = c_n \prod_{j=1}^r (z - z_j)^{m_j}.$$

**Satz 14.24 (Partialbruchzerlegung)** Seien  $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  Polynome, wobei  $Q(z) = c_n \prod_{j=1}^r (z - z_j)^{m_j}$ . Dann kann die rationale Funktion  $R := \frac{P}{Q}$  geschrieben werden als

$$R(z) = T(z) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{d_{j,k}}{(z - z_j)^k},$$

wobei  $T$  ein Polynom ist und  $d_{j,k} \in \mathbb{C}$ .  $T$  sowie die Zahlen  $d_{j,k}$  sind eindeutig bestimmt.

**Bemerkung.** Satz 14.24 kann für die Integration rationaler Funktionen benutzt werden. Für die Summanden  $T$  und  $\frac{d_{j,k}}{(z - z_j)^k}$  findet man nämlich Stammfunktionen sehr einfach.

## 15 Kurven und Kurvenintegrale

Kurven sind anschauliche geometrische Objekte. Diese möchten wir jetzt analytisch untersuchen. Es geht um die Parametrisierung einer Kurve, um die Definition und Berechnung deren Länge und um die Integration von Funktionen, die auf Kurven definiert werden.

### 15.1 Kurven

**Definition.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall und  $m \in \mathbb{N}$ . Eine stetige Abbildung

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißt *Kurve* (oder genauer Kurvenparametrisierung). Wir nennen  $f(I)$  die *Spur der Kurve*  $f$ . Eine Kurve  $f$  heißt differenzierbar in  $t \in I$ , falls

$$f'(t) := \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$$

existiert.  $f'(t)$  heißt dann *Ableitung* in  $t$ .

$f$  heißt *differenzierbar*, falls  $f$  für alle  $t \in I$  differenzierbar in  $t$  ist,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stetig differenzierbar*, falls zusätzlich  $t \mapsto f'(t)$  stetig ist in  $I$ .

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *regulär*, falls  $f$  stetig differenzierbar ist und zusätzlich  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt.

**Bemerkung.** 1. Der Quotient  $\frac{1}{s-t}(f(s) - f(t))$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^m$ . Es ist der Richtungsvektor der Sekante durch die Punkte  $f(s), f(t)$ ,  $s \in I \setminus \{t\}$ . Die Ableitung ist dann  $f'(t)$  der Richtungsvektor der Tangente an die Spur von  $f$  in  $f(t)$ .

2. Eine Kurve  $t \mapsto f(t)$  kann man auch als eine Bewegung in  $\mathbb{R}^m$  verstehen und  $t$  als eine Zeitvariable. Dann entspricht  $f'(t)$  dem Geschwindigkeitsvektor der Bewegung. Die skalare Größe  $\|f'(t)\|_2$  bezeichnet dann, wie schnell die Kurve durchlaufen wird.
3. Da die Konvergenz einer Folge von Vektoren in  $\mathbb{R}^m$  äquivalent zur Konvergenz in jeder Komponente ist, gilt für die Ableitung  $f'(t)$  von einer Kurve  $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^m$

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_m(t)).$$

und  $f$  ist genau dann differenzierbar in  $t \in I$ , wenn für alle  $i = 1, \dots, m$  die Komponentenfunktion  $f_i$  differenzierbar in  $t$  ist.

**Definition.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine reguläre Kurve. Dann heißt  $f'(t) \in \mathbb{R}^m$  *Tangentenvektor* der Kurve im Punkt  $f(t)$  und  $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$  der *Tangentialeinheitsvektor*.

**Bemerkung.** Wenn sich zwei reguläre Kurven schneiden, kann der Schnittwinkel definiert werden. Dieser wird als der Winkel zwischen den zwei Tangentialvektoren definiert.

**Definition.** Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m, g : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  reguläre Kurven und gelte  $f(t_1) = g(t_2)$  für zwei Werte  $t_1 \in I, t_2 \in J$ . Dann heißt  $\theta \in [0, \pi]$  mit

$$\cos(\theta) = \frac{(f'(t_1), g'(t_2))}{\|f'(t_1)\|_2 \|g'(t_2)\|_2}$$

der *Schnittwinkel* der Kurven  $f$  und  $g$  bei den Parameterwerten  $t_1, t_2$ .

Die Spur einer Kurve kann mehrere Kurvenparametrisierungen haben. Zum Beispiel,  $f(t) := (0, t)$  für  $t \in [0, 1]$  sowie  $g(t) := (0, t^6)$  für  $t \in [0, 1]$  stellen die Strecke zwischen den Punkten  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  und  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$  dar.

**Definition.** Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle. Die Kurven  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißen *äquivalent*, falls es eine stetige bijektive Abbildung  $\varphi : J \rightarrow I$  gibt, sodass  $g = f \circ \varphi$ , d.h.

$$g(\tau) = f(\varphi(\tau)) \quad \text{für alle } \tau \in J.$$

$\varphi$  heißt eine *Parametertransformation*.  $g$  heißt dann eine *Umparametrisierung* von  $f$ .

Eine Parametertransformation  $\varphi$  heißt eine  *$C^1$ -Parametertransformation*, falls  $\varphi \in C^1(J)$ .

**Bemerkung.** 1. Offenbar sind die Spuren äquivalenter Kurven identisch, nur werden sie verschieden durchlaufen.

2.  $\varphi : J \rightarrow I$  bijektiv und stetig ist entweder streng monoton steigend („orientierungstreu“) oder streng monoton fallend („orientierungsumkehrend“). Nach einer orientierungstreuen Transformation wird die Kurve  $t \mapsto g(t)$  beim wachsenden  $t$  in derselben Richtung durchgelaufen, wie für  $t \mapsto f(t)$ .

Jetzt widmen wir uns der Länge von Kurven. Diese wird definiert als das Supremum der Summe der Sekantenlängen über alle mögliche (beliebig feine) Zerlegungen von  $[a, b]$ .

**Definition.** Sei  $a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  Kurve. Dann heißt  $f$  *rektifizierbar* mit der *Länge* (Bogenlänge)  $L$ , falls

$$L(f) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

endlich ist. (Das Supremum wird also über beliebige Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  gebildet.)

**Satz 15.1** Jede stetig differenzierbare Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist rektifizierbar und für ihre Länge  $L$  gilt

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt.$$

Falls der Begriff der Kurvenlänge unserer Erwartung entsprechen soll, muss die Länge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sein.

**Satz 15.2** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Kurve,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  bijektiv, stetig differenzierbar und  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  die durch  $\varphi$  induzierte Umparametrisierung  $g := f \circ \varphi$ . Dann gilt  $L(f) = L(g)$ .

**Definition.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Kurve. Die Funktion  $s_f : [a, b] \rightarrow [0, L(f)]$ ,

$$s_f(t) := \int_0^t \|f'(\tau)\|_2 d\tau$$

heißt die *Bogenlängenfunktion* von  $f$ .

Auch der Schnittwinkel ist von der Parametrisierung unabhängig (ggf. bis auf einen Übergang zum  $\pi$ -Komplementären Winkel).

**Proposition 15.3** Seien  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  Intervalle und seien Kurven  $f_{1,2} : I_{1,2} \rightarrow \mathbb{R}^m$  regulär mit  $f_1(t_1) = f_2(t_2)$  für ein  $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2$ . Sei  $\theta$  der Schnittwinkel von  $f_1$  und  $f_2$  in den Parameterwerten  $t_1$  bzw.  $t_2$ . Seien nun  $\varphi_{1,2} : I_{1,2} \rightarrow J_{1,2}$  zwei  $C^1$ -Parametertransformationen und  $g_i := f_i \circ \varphi_i, i = 1, 2$  die transformierten Kurven. Für  $\tau_i := \varphi_i^{-1}(t_i)$  gilt dann  $g_1(\tau_1) = g_2(\tau_2)$  und der Schnittwinkel  $\tilde{\theta}$  von  $g_1$  und  $g_2$  in den Parameterwerten  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  erfüllt

- $\tilde{\theta} = \theta$ , falls  $\varphi_{1,2}$  beide orientierungstreu oder beide orientierungsumkehrend sind.
- $\tilde{\theta} = \pi - \theta$ , falls eine von  $\varphi_{1,2}$  orientierungstreu und die andere orientierungsumkehrend ist.

## 15.2 Kurvenintegrale

Über Kurven können wir stetige Funktionen integrieren. Wir beschränken uns auf Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  und unterscheiden dabei zwei Typen von Integralen. Im ersten Typ wird eine skalare Funktion ( $n = 1$ ) über eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  integriert. Im zweiten Typ betrachtet man eine vektorwertige Funktion  $f : \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^m$  und integriert deren tangentielle Komponente über die Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

### 15.2.1 Kurvenintegrale 1. Art

Eine physikalische Motivation:

Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist gegeben und darauf wird eine Dichteverteilung  $t \mapsto \rho(\gamma(t))$  definiert. Gesucht wird die Gesamtmasse  $M(\gamma)$  der Kurve. Analog zu Riemannschen Summen betrachtet man Zerlegungen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  von  $[a, b]$  mit Stützstellen  $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ . Dann wird  $M(\gamma)$  approximiert durch

$$M(\gamma) \approx \sum_{j=1}^N \rho(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 = \sum_{j=1}^N \rho(\gamma(\xi_j)) \|\gamma'(\eta_j)\|_2 (t_j - t_{j-1}),$$

wobei  $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$  (Mittelwertsatz). Mit  $N \rightarrow \infty$  gilt offenbar  $\eta_j \rightarrow \xi_j$  für alle  $j$  und falls die Summe konvergiert, ergibt sich das Integral  $\int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$ . Also

$$M(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

**Definition.** Sei  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  stetig differenzierbare Kurve. Sei  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt

$$\int_{\gamma} h \, ds := \int_a^b h(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

das *Kurvenintegral 1. Art* von  $h$  entlang  $\gamma$ .

**Bemerkung.** 1. Für  $\rho \equiv 1$  ist  $M(\gamma) = L(\gamma)$ , d.h. die Länge der Kurve.

2. Mit der Bogenlänge  $s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|_2 \, d\tau$  ist

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|\gamma'(t)\|_2.$$

Also, nach der Substitution  $\tau = s(t)$  ist

$$\int_{\gamma} h \, ds = \int_0^{L(\gamma)} h(\gamma(s^{-1}(\tau))) \, d\tau.$$

3. Das Kurvenintegral 1. Art erfüllt

- $\int_{\gamma} (\lambda_1 f_1(s) + \lambda_2 f_2(s)) \, ds = \lambda_1 \int_{\gamma} f_1(s) \, ds + \lambda_2 \int_{\gamma} f_2(s) \, ds,$
- $\left| \int_{\gamma} f(s) \, ds \right| \leq \int_{\gamma} |f(s)| \, ds \leq \|f(\gamma)\|_{sup, [a, b]} L(\gamma)$

für alle  $f, f_1, f_2 : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  stetig (mit  $V$  offen), alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ .

### 15.2.2 Kurvenintegrale 2. Art

Eine physikalische Motivation:

Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist gegeben. Ein Massepunkt wird unter Einwirkung eines äußeren Kraftfeldes  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  entlang der Kurve  $\gamma$  bewegt. Gesucht wird die geleistete Arbeit  $W$ .

Wir betrachten wieder eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  von  $[a, b]$  und setzen  $x_j := \gamma(t_j), j = 1, \dots, N$ . Da Arbeit für eine Bewegung entlang einer geraden Strecke gleich der Kraft in der Bewegungsrichtung mal der Streckenlänge ist, folgt

$$W \approx \sum_{j=1}^N (F(\gamma(\xi_j)), x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^N (F(\gamma(\xi_j)), \gamma'(\eta_j)) (t_j - t_{j-1}),$$

wobei  $\xi_j, \eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$  Zwischenpunkte sind.

Mit  $N \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$W = \int_a^b (F(\gamma(t)), \gamma'(t)) \, dt.$$

**Definition.** Sei  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  stetig differenzierbare Kurve. Sei  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Dann heißt

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{x} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

das *Kurvenintegral 2. Art* von  $F$  entlang  $\gamma$ .

**Bemerkung.** Das Kurvenintegral 2. Art erfüllt

- $\int_{\gamma} (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)) \cdot \vec{dx} = \lambda_1 \int_{\gamma} F_1(x) \cdot \vec{dx} + \lambda_2 \int_{\gamma} F_2(x) \cdot \vec{dx}$ ,
- $\left| \int_{\gamma} F(x) \cdot \vec{dx} \right| \leq \max_{x \in \gamma([a,b])} \|F(x)\|_2 L(\gamma)$

für alle  $F, F_1, F_2 : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig (mit  $V$  offen), alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ .

Wir untersuchen jetzt die Abhängigkeit der oben definierten Kurvenintegrale von der Parametrisierung.

**Satz 15.4** Sei  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  stetig differenzierbare Kurve,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\varphi'(\tau) \neq 0$  für alle  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , und sei  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$  die durch  $\varphi$  umparametrisierte Kurve.

1. Für alle  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_{\gamma} h ds = \int_{\tilde{\gamma}} h ds.$$

2. Für alle stetigen Vektorfelder  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt

$$\int_{\gamma} F \cdot \vec{dx} = \pm \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \vec{dx},$$

mit „+“ falls  $\varphi$  orientierungserhaltend, und „-“ falls  $\varphi$  orientierungsumkehrend ist.

## 16 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

In Analysis I haben wir die Ableitung von Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gelernt. Diese gibt die Steigung der Funktion in der positiven  $t$ -Richtung an. Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n > 1$  gibt es unendlich viele Richtungen in den man die Steigung betrachten kann. Steigungen in bestimmten Richtungen nennen wir “Richtungsableitungen”. Den Begriff “Ableitung” (totale Ableitung) behalten wir für eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokal approximiert, cf. Lineare Approximierbarkeit von differenzierbaren Funktionen aus Analysis I. Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  werden dann Richtungsableitungen und die Ableitung komponentenweise definiert.

Wir werden ab jetzt möglichst konsequent Vektoren in der Form von Spalten (eher als Reihen) darstellen, d.h.  $v \in \mathbb{R}^m$  ist

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_m)^T.$$

### 16.1 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und die (totale) Ableitung

Sei im Folgenden stets  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  die Standard-Einheitsvektoren im  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ , usw.

**Definition.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$ . Wir sagen, dass  $f$  im Punkt  $x$  eine *Ableitung in Richtung*  $v \in \mathbb{R}^n$  besitzt, falls

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

existiert (in  $\mathbb{R}^m$ ). Diesen Limes bezeichnen wir dann mit  $\partial_v f(x)$ .

Ist  $v = e_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  und existiert  $\partial_j f(x) := \partial_v f(x)$ , so heißt diese Richtungsableitung *j-te partielle Ableitung* von  $f$  in  $x$ , wir schreiben dafür auch  $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$  oder  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ .

$f$  heißt *partiell differenzierbar* in  $x$ , falls alle partiellen Ableitungen  $\partial_j f(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$  existieren, und *partiell differenzierbar* (auf  $U$ ), falls die partielle Ableitung  $\partial_j f(x)$  für alle  $j = 1, \dots, n$  und für alle  $x \in U$  existiert. Schließlich heißt  $f$  *stetig partiell differenzierbar*, falls  $\partial_j f$  zusätzlich stetig ist für alle  $j = 1, \dots, n$ .

**Bemerkung.** 1.  $\partial_v f(x)$  existiert also genau dann, wenn  $g'(0)$  existiert, wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g(t) := f(x + tv)$ .  
2. Im Spezialfall einer Kurve  $f : \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  erhalten wir die gleiche Ableitung wie in Abschnitt 15.1.

**Satz 16.1** Seien  $x \in U$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

1. Falls  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\partial_v f(x), \partial_v g(x)$  existieren, so existiert für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  auch die Richtungsableitung  $\partial_v(\alpha f + g)(x)$  und es gilt

$$\partial_v(\alpha f + g)(x) = \alpha \partial_v f(x) + \partial_v g(x).$$

2.  $\partial_v f(x)$  existiert genau dann, wenn für alle  $i = 1, \dots, m$  die Richtungsableitungen  $\partial_v f_i(x)$  existieren. Es gilt dann

$$\partial_v f(x) = (\partial_v f_1(x), \dots, \partial_v f_m(x))^T.$$

3. Falls  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\partial_v f(x), \partial_v g(x)$  existieren, so existiert auch

$$\partial_v(fg)(x) = \partial_v f(x)g(x) + f(x)\partial_v g(x).$$

Falls zusätzlich  $g(x) \neq 0$ , so existiert auch

$$\partial_v \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\partial_v f(x)g(x) - f(x)\partial_v g(x)}{g(x)^2}.$$

4. Falls  $f : U \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und falls  $\partial_v f(x), g'(f(x))$  existieren, so existiert auch

$$\partial_v(g \circ f)(x) = g'(f(x))\partial_v f(x).$$

**Definition.** Sie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))^T$$

der *Gradient* von  $f$  in  $x$ .

**Bemerkung.** Für zwei partiell differenzierbare Funktionen  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

**Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist einfach zu zeigen, dass  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar ist.

Gleichzeitig existiert aber in  $x = 0$  die Richtungsableitung in Richtung  $v = (1, 1)$  nicht! Die Existenz dieser Ableitung ist äquivalent zur Existenz der Ableitung in  $t = 0$  der Funktion  $g$ :

$$g(t) := f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$g$  ist offensichtlich nicht differenzierbar (sogar nicht stetig) in  $t = 0$ . Also existiert  $\partial_v f(0)$  nicht!

Eine partiell differenzierbare Funktion muss also nicht stetig sein. Dies steht in Kontrast mit differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die immer stetig sind. Wir brauchen also für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  einen stärkeren Differenzierbarkeitsbegriff um, z.B., Stetigkeit aus Differenzierbarkeit folgern zu können. Dies wird uns der folgende Begriff der (totalen) Differenzierbarkeit liefern.

**Definition.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$ . Dann heißt  $f$  *differenzierbar* in  $x$ , falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert, sodass

$$\frac{f(y) - (f(x) + A(y-x))}{\|y-x\|_2} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow x).$$

Wir nennen dann

$$Df(x) := A.$$

die *Ableitung* von  $f$  in  $x$ . Zur deutlicheren Abgrenzung zur Richtungsableitung wird  $f$  auch *total differenzierbar* und  $Df$  *totale Ableitung* genannt.

**Bemerkung.** 1. Mit der Substitution  $y = x + h$  ist  $Df(x)$  Ableitung in  $x$  genau dann, wenn

$$\frac{f(x+h) - (f(x) + Df(x)h)}{\|h\|_2} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Wir schreiben bei linearen Abbildungen  $L$  normalerweise  $Lx$  statt  $L(x)$ , deswegen steht oben  $Df(x)h$  und nicht  $Df(x)(h)$ . Diese Schreibweise ist in Ordnung, da lineare Abbildungen  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tatsächlich immer als eine Multiplikation dargestellt werden können - nämlich als Multiplikation durch eine  $m \times n$  Matrix, siehe unten.

2. Nach dem Satz über die Lineare Approximierbarkeit von reellen differenzierbaren Funktionen (Satz 10.1) existiert im Fall  $n = m = 1$  die (totale) Ableitung in  $x \in U$  genau dann, wenn  $f'(x)$  existiert. Die lineare Abbildung  $Df(x)$  ist gegeben durch  $v \mapsto f'(x)v$ .
3. Jede lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  kann bzgl der Standard-Basen  $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\} \subset \mathbb{R}^n$  und  $\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^m$  durch eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eindeutig dargestellt werden. Es gilt dann

$$L(v) = Av \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

$A$  ist gegeben durch die Einträge  $a_{ij} = (e_i^{(m)})^T L(e_j^{(n)})$ . Oft werden wir  $L$  mit  $A$  identifizieren.

Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Einträgen  $a_{ij}$  definieren wir die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F := \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies definiert tatsächlich eine Norm. Es gelten die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \|Av\|_2 &\leq \|A\|_F \|v\|_2 && \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \\ \|AB\|_F &\leq \|A\|_F \|B\|_F && \text{für alle } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Eine direkte Folgerung ist, dass

$$\|Av - Aw\|_2 = \|A(v - w)\|_2 \leq \|A\|_F \|v - w\|_2 \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Dies zeigt, dass für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  beliebig die Abbildung  $v \mapsto Av$  Lipschitzstetig ist.

**Satz 16.2** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x \in U$ . Dann folgt:

- (i)  $f$  ist in  $x$  stetig.
- (ii) Es existiert für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung  $\partial_v f(x)$  und es gilt

$$\partial_v f(x) = Df(x)v.$$

- (iii)  $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  kann dargestellt werden durch die sogenannte *Jacobimatrix*,

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist  $Df(x)$  eindeutig bestimmt.

**Bemerkung.** Für differenzierbares  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt also für die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = Df(x)v = \nabla f(x)^T v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz Ungleichung erhalten wir für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\|_2 = 1$ , dass

$$|\partial_v f(x)| = |\nabla f(x)^T v| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|v\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $v$  in Richtung von  $\nabla f(x)$  zeigt. Der **Gradient**  $\nabla f(x)$  gibt also die **Richtung des steilsten Anstiegs** der Funktion  $f$  im Punkt  $x$  an.

**Proposition 16.3** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann differenzierbar in  $x \in U$ , falls für alle  $j = 1, \dots, m$  die Komponentenfunktion  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in U$  ist. Dann ist die Ableitung gegeben durch

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}.$$

**Satz 16.4** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar in  $U$ , sei  $x \in U$ , und seien alle partiellen Ableitungen  $\partial_j f$ ,  $j = 1, \dots, m$  stetig in  $x$ . Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x$ .

**Korollar 16.5** Falls  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig partiell differenzierbar ist, so ist  $f$  auch stetig in  $U$ .

**Bemerkung.** Da die Ableitung durch die Jakobimatrix gegeben ist, die wiederum aus partiellen Ableitungen besteht, folgt, dass eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  genau dann stetig partiell differenzierbar in  $U$  ist, wenn sie differenzierbar ist und die Ableitung  $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig ist.

**Satz 16.6 (Kettenregel)** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $f(U) \subset V$ . Seien  $f$  in  $x_0 \in U$  differenzierbar und  $g$  in  $f(x_0)$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) Df(x_0).$$

**Bemerkung.** Die Jacobimatrix  $D(g \circ f)(x_0)$  ist also das Produkt der Jacobimatrizen  $Dg(f(x_0))$  und  $Df(x_0)$ . Die Einträge der Matrix  $D(g \circ f)(x_0)$  sind also

$$(D(g \circ f)(x_0))_{i,k} = \partial_k(g \circ f)_i(x_0) = \sum_{j=1}^m \partial_j g_i(y_0) \partial_k f_j(x_0).$$

**Satz 16.7** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x \in U$  differenzierbar.

1. Ist  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\alpha f + g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x$  mit

$$D(\alpha f + g)(x) = \alpha Df(x) + Dg(x).$$

2. Ist  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x$ , so ist auch  $f g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x$  mit

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x).$$

Falls zusätzlich  $g(x) \neq 0$ , dann ist auch  $\frac{f}{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x$  mit

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)^2} (Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)).$$

**Beispiel.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $g : I \rightarrow U$  Kurve und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Dann ist  $h := f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  Kurve. Falls nun  $g$  differenzierbar in  $t \in I$  und  $f$  differenzierbar in  $x = g(t)$  ist, so folgt, dass  $h$  differenzierbar in  $t$  ist mit

$$h'(t) = D(f \circ g)(t) = Df(g(t))Dg(t) = Df(x)g'(t),$$

$Df(x)$  bildet also einen Tangentialvektor der Kurve  $g$  auf einen Tangentialvektor der Kurve  $h$  ab.

Wir untersuchen jetzt konkret den Fall  $n = 2$ ,  $m = 3$  und  $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  mit

$$f(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{für } (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

Dann gilt immer  $|f(\theta, \varphi)|^2 = 1$ , das Bild von  $f$  liegt also auf der Einheitskugel des  $\mathbb{R}^3$ . Weiterhin ist  $f$  differenzierbar. Außerdem ist die ganze Einheitskugel das Bild von  $f$ . Die Koordinaten  $\theta, \varphi$  sind die Winkelkoordinaten der s.g. Kugelkoordinaten.

Für eine beliebige differenzierbare Kurve  $g : I \rightarrow U$  ist  $h = f \circ g$  eine Kurve mit der Spur auf der Einheitskugel wegen  $1 = \|h(t)\|_2^2$  für alle  $t \in I$ . Außerdem ist

$$0 = \frac{d}{dt} \|h(t)\|_2^2 = \frac{d}{dt} (h(t) \cdot h(t)) = 2h(t) \cdot h'(t)$$

und damit ist jeder Tangentialvektor der Kurve  $h$  orthogonal zu seinem Ortsvektor.

**Bemerkung 16.1** Wir zeigen, dass der Gradient einer reellwertigen differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  immer senkrecht auf den Höhenlinien von  $f$  steht.

Eine Höhenlinie von  $f$  ist eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , sodass für ein  $c \in \mathbb{R}$

$$f(\gamma(t)) = c \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Falls  $\gamma$  differenzierbar in  $t \in (a, b)$  und  $f$  differenzierbar in  $\gamma(t)$ , so folgt

$$0 = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

und der Gradient in  $\gamma(t)$  steht senkrecht auf der Höhenlinie durch  $\gamma(t)$ .

## 16.2 Mittelwertsatz, Version des Hauptsatzes

**Bemerkung.** Die Integration von vektorwertigen Funktionen in  $\mathbb{R}$ , d.h. von Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird komponentenweise erklärt:

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left( \int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_m(t) dt \right)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Dieses Integral können wir auch als Limes von Riemannsummen erhalten - wie in Analysis I für skalare Funktionen. Aus dieser Darstellung bekommen wir am einfachsten die Dreiecksungleichung für Integrale von vektorwertigen Funktionen. Mit der äquidistanten Zerlegung  $t_j = a + j \frac{b-a}{N}$ ,  $j = 0, \dots, N$  und Stützstellen  $t_j$  ist nämlich

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|_2 &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \gamma(t_j)(t_j - t_{j-1}) \right\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^N \gamma(t_j)(t_j - t_{j-1}) \right\|_2 \\ &\leq \limsup_N \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_j)\|_2 |t_j - t_{j-1}| = \int_a^b \|\gamma(t)\|_2 dt, \end{aligned}$$

wobei die Dreiecksungleichung von  $\|\cdot\|_2$  in  $\mathbb{R}^m$  verwendet wurde.

Folgendes ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung.

**Lemma 16.8** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  stückweise stetig differenzierbar (d.h.  $\gamma \in C^1([a, t_1] \cup (t_2, t_3) \cup \dots \cup (t_N, b]; U)$  für ein  $N \in \mathbb{N}$  und Punkte  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  in  $(a, b)$ ). Dann gilt für alle  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

**Definition.** Eine Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$  heißt *wegzusammenhängend*, falls es für alle  $x, y \in V$  eine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$  gibt, sodass  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gilt.

**Lemma 16.9** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und wegzusammenhängend. Dann existiert für alle  $x, y \in U$  eine stückweise affine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ , sodass  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gilt.

**Satz 16.10 (Konstanzsatz)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und wegzusammenhängend. Falls dann  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar ist mit  $Df(x) = 0$  für alle  $x \in U$ , dann ist  $f$  konstant.

**Bemerkung.** Ohne die Bedingung, dass  $U$  wegzusammenhängend ist, kann  $Df = 0$  auf  $U$  aber  $f$  muss nicht konstant sein. Falls, z.B.,  $U = U_1 \cup U_2$  mit  $U_1$  getrennt von  $U_2$  und  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $Df = 0$  auf  $U_1 \cup U_2$  aber nicht  $Df \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist es möglich, dass  $f = c_1$  auf  $U_1$  und  $f = c_2$  auf  $U_2$ , wobei  $c_1 \neq c_2$ .

**Satz 16.11 (Mittelwertsatz)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und seien  $x, y \in U$  solche Punkte, dass die ganze Strecke  $x + t(y - x), 0 \leq t \leq 1$ , in  $U$  liegt. Falls  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar ist (d.h.  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ ), dann gilt

$$f(y) - f(x) = \left( \int_0^1 Df(x + t(y - x)) dt \right) (y - x).$$

Wenn mit zwei Punkten einer Menge auch immer deren Verbindungsstrecke in der Menge liegt, so heißt die Menge konvex.

**Definition.** Eine Menge  $C \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls für alle  $x, y \in C$  gilt:

$$(1 - t)x + ty \in C \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

**Korollar 16.12 (Schrankensatz)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex und  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ . Dann gilt für alle  $x, y \in U$

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \|y - x\|_2,$$

wobei  $M := \sup_{t \in [0, 1]} \|Df(x + t(y - x))\|_F$ .

### 16.3 Höhere Ableitungen, Taylor-Formel

Auch Funktionen mehrerer Variablen können wiederholt abgeleitet werden.

**Definition. (Höhere partielle Ableitungen)** Falls für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  die partielle Ableitung  $\partial_j f$  auf ganz  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen existiert und falls die Funktion  $\partial_j f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x \in U$  eine partielle Ableitung nach  $x_i$  besitzt, so setzen wir

$$\partial_i \partial_j f(x) := \partial_i (\partial_j f)(x).$$

Höhere partielle Ableitungen definieren wir induktiv wie folgt: Falls für ein  $k \in \mathbb{N}$  und für  $i(1), \dots, i(k+1) \in \{1, \dots, n\}$  die partielle Ableitung  $\partial_{i(k)} \cdots \partial_{i(1)} f$  auf ganz  $U$  existiert und die Funktion  $\partial_{i(k)} \cdots \partial_{i(1)} f$  in  $x$  nach  $x_{i(k+1)}$  partiell differenzierbar ist, so setzen wir

$$\partial_{i(k+1)} \cdots \partial_{i(1)} f(x) = \partial_{i(k+1)} (\partial_{i(k)} \cdots \partial_{i(1)} f)(x).$$

**Definition.** Wir bezeichnen mit  $C^k(U; \mathbb{R}^m)$  die Menge der  $k$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , d.h. für alle  $j \leq k$  und alle  $i(1), \dots, i(j) \in \{1, \dots, n\}$  existiert  $\partial_{i(j)} \cdots \partial_{i(1)} f$  auf ganz  $U$  und ist stetig.

Wir definieren  $C^\infty(U; \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U; \mathbb{R}^m)$ .

**Satz 16.13 (Schwarz)** Sei  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$ . Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$$

für alle  $i, j = 1, \dots, n$  und alle  $x \in U$ .

**Bemerkung.** Auch für die (totale) Ableitung gibt es Ableitungen höherer Ordnung. Diese sind dann multilineare Abbildungen, siehe, z.B. Sec. 27 in [5].

**Definition.** Ein *Multiindex*  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ist ein Tupel mit  $n$  Einträgen aus  $\mathbb{N}_0$ . Für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  definieren wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

als die Ordnung von  $\alpha$  und setzen

$$\partial^\alpha f(x) := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x),$$

wobei  $\partial_i^l f(x) = \partial_i \dots \partial_i f(x)$  die  $l$ -fache partielle Ableitung von  $f$  im Punkt  $x \in U$  in  $i$ -ter Koordinatenrichtung bezeichnet.

Wir definieren noch für einen Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Als nächstes verallgemeinern wir Satz von Taylor (Satz 13.6) auf reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher.

**Satz 16.14 (Taylor)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$ . Sei weiter  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  gegeben, sodass die ganze Strecke von  $x$  bis  $x+v$  in  $U$  liegt, d.h.

$$\{x + tv : t \in [0, 1]\} \subset U.$$

Dann existiert ein  $\tau \in [0, 1]$ , sodass

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\tau v)}{\alpha!} v^\alpha.$$

**Bemerkung.** Die Summe  $\sum_{|\alpha| \leq k}$  bedeutet, dass über alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  summiert wird.

**Korollar 16.15** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^k(U, \mathbb{R})$  und  $x \in U$  beliebig. Das Taylorpolynom

$$T_{k,x}(z) := \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} (z-x)^\alpha$$

ist das eindeutig bestimmte Polynom  $P_k$  vom Grad höchstens  $k$ , sodass

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - P_k(z)}{\|z-x\|_2^k} = 0.$$

Insbesondere gilt

$$f(z) = T_{k,x}(z) + \varphi_{k,x}(z) \|z-x\|_2^k, \quad \varphi_{k,x}(z) \rightarrow 0 \ (z \rightarrow x).$$

**Definition.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ . Die *Hessematrix*  $D^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  in  $x$ ,

$$D^2 f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Bemerkung.** 1. Nach dem Satz von Schwarz ist  $D^2 f(x)$  symmetrisch.

2. Korollar 16.15 angewandt auf den Fall von  $C^2(U, \mathbb{R})$  Funktionen liefert eine lokale quadratische Approximation von  $f$

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x) h + \varphi_x(h) \|h\|_2^2,$$

wobei  $\varphi_x(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ).

Für den quadratischen Term gilt nämlich

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x) h_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j = \frac{1}{2} h^T D^2 f(x) h.$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor der Summe  $\sum_{i \neq j}$  korrigiert den Fakt, dass in der Summe  $\sum_{i \neq j} \partial_i \partial_j f(x)$  jede Ableitung doppelt steht ( $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$ ).

## 16.4 Lokale Extrema

In diesem Abschnitt betrachten wir reelwertige Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und untersuchen ihre lokale Extrema. Es sei weiterhin  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

**Definition.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x \in U$

1. ein *lokales Maximum* (bzw. *strikt lokales Maximum*), falls ein  $r > 0$  existiert, sodass für alle  $y \in B(x, r) \setminus \{x\}$  gilt, dass

$$f(y) \leq f(x) \quad (\text{bzw. } f(y) < f(x)).$$

2. ein *lokales Minimum* (bzw. *strikt lokales Minimum*), falls ein  $r > 0$  existiert, sodass für alle  $y \in B(x, r) \setminus \{x\}$  gilt, dass

$$f(y) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(y) > f(x)).$$

3. ein *lokales Extremum*, falls  $x$  ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist,
4. einen *stationären* (oder *kritischen*) *Punkt*, falls  $f \in C^1(U)$  und  $\nabla f(x) = 0$ ,
5. einen *Sattelpunkt*, falls  $x$  ein kritischer Punkt ist und in jeder Umgebung von  $x$  Punkte  $a, b$  liegen, für die  $f(a) < f(x) < f(b)$ .

**Satz 16.16** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in U$ . Falls  $f$  in  $x$  ein lokales Extremum hat, so gilt

$$\nabla f(x) = 0.$$

Als nächstes verallgemeinern wir die Begriffe „Positivität“ und „Negativität“ der zweiten Ableitung einer reellen Funktion.

**Definition.** Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *positiv definit* (bzw. *positiv semidefinit*), falls für alle  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt:

$$v^T A v > 0 \quad (\text{bzw. } v^T A v \geq 0).$$

$A$  heißt *negativ definit* (bzw. *negativ semidefinit*), falls für alle  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt:

$$v^T A v < 0 \quad (\text{bzw. } v^T A v \leq 0).$$

$A$  heißt *indefinit*, falls zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  existieren, sodass

$$v^T A v > 0 \quad \text{und} \quad w^T A w < 0.$$

**Lemma 16.17** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und positiv definit. Dann existiert  $\alpha > 0$  mit

$$x^T A x \geq \alpha |x|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Satz 16.18** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  und  $x \in U$  ein stationärer Punkt von  $f$ . Dann gilt:

1. Falls  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum/Maximum besitzt, so ist  $D^2f(x)$  positiv/negativ semidefinit.
2. Falls  $D^2f(x)$  positiv/negativ definit ist, so besitzt  $f$  in  $x$  ein striktes lokales Minimum/Maximum.
3. Falls  $D^2f(x)$  indefinit ist, so besitzt  $f$  in  $x$  einen Sattelpunkt.

**Beispiel.** Wir betrachten  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) := x^2 + xy + y^2 - z^2$ . Es ist  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  und

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

Der einzige stationäre Punkt ist also  $(x, y, z)^T = 0 \in \mathbb{R}^3$ . Die Hessematrix in einem beliebigen Punkt  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  ist

$$D^2f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

und daher

$$e_1^T D^2f(0)e_1 = 2 > 0, \quad e_3^T D^2f(0)e_3 = -2 < 0.$$

Damit ist die Hessematrix in 0 indefinit. Nach Satz 16.18 ist 0 ein Sattelpunkt von  $f$ .

## 16.5 Inverse Funktion und Implizite Funktion

In diesem Abschnitt beweisen wir als erstes den sehr praktischen Banachschen Fixpunktsatz. Danach zeigen wir, wann eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  die Umkehrabbildung besitzt und welche Eigenschaften diese hat. Danach widmen wir uns der Frage der Lösbarkeit der Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach der Variable  $y$ , falls  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ . Für jedes  $x \in U_1$  ist also das Ziel die Existenz der Lösung  $y = y(x)$  von  $F(x, y) = 0$  zu zeigen. Die Funktion  $x \mapsto y(x)$  kann normalerweise nicht explizit berechnet werden und heißt deswegen eine implizite Funktion.

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Die Funktion  $f : X \rightarrow X$  heißt *Kontraktion*, wenn es eine Zahl  $q \in [0, 1)$  gibt, sodass

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

$q$  heißt dann Kontraktionskonstante.

Ein Punkt  $x \in X$  mit  $f(x) = x$  heißt *Fixpunkt* von  $f$ .

Offenbar ist jede Kontraktion Lipschitzstetig und damit insbesondere stetig. Der Banachsche Fixpunktsatz unten ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Lösung von nichtlinearen Gleichungen. Der Satz liefert eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage aber auch ein konstruktives Verfahren für die Bestimmung der Lösung.

**Satz 16.19 (Banachscher Fixpunktsatz)** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Kontraktion. Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt  $x \in X$ .

Für beliebiges  $x_0 \in X$  konvergiert außerdem gegen  $x$  die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definiert durch

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Als nächstes wollen wir die lokale Invertierbarkeit von Funktionen und Differenzierbarkeitseigenschaften der Inverse untersuchen.

**Definition.** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann nennen wir  $f : U \rightarrow V$  einen  $C^k$ -Diffeomorphismus,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , falls  $f$  bijektiv ist und  $f$  und  $f^{-1}$  beide  $k$ -mal stetig differenzierbar sind, d.h.  $f \in C^k(U, V)$ ,  $f^{-1} \in C^k(V, U)$ .

**Satz 16.20 (Umkehrsatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in \Omega$ ,  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  und  $Df(x_0)$  invertierbar. Dann existiert eine offene Umgebung  $U \subset \Omega$  von  $x_0$ , sodass gilt:

1.  $V = f(U)$  ist offene Umgebung von  $y_0 := f(x_0)$ ,
2.  $f|_U$  ist  $C^1$ -Diffeomorphismus und für seine Inverse  $g : V \rightarrow U$  gilt

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1} \quad \text{für alle } y \in V. \quad (2)$$

Zusätzlich gilt: Falls  $f \in C^k(U; V)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so ist auch  $g \in C^k(V; U)$ .

**Beispiel.** Wir betrachten  $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  und bezeichnen  $x := r \cos \varphi$ ,  $y := r \sin \varphi$ . Die Zahlen  $r$  und  $\varphi$  sind die so genannten Polarkoordinaten. Die Funktion  $f$  ist nicht (global) invertierbar, da sie nicht injektiv ist ( $f(r, \varphi + 2\pi) = f(r, \varphi) \forall r, \varphi$ ). Da aber  $Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ , gilt  $\det Df(r, \varphi) = r > 0$  und  $f$  ist nach Satz 16.20 lokal invertierbar in jedem Punkt  $(r, \varphi)$ . Zum Beispiel auf  $U := (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$  ist  $f$  bijektiv und die Inverse ist  $g(x, y) := (f|_U)^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)$ . Die Ableitung von  $g$  ist gegeben durch

$$Dg(x, y) = (Df(r, \varphi))^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

Als nächstes widmen wir uns dem Satz über die implizite Funktion. Im Folgenden sei immer  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

**Bemerkung.** Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m < n$ . Angenommen wir möchten die Gleichung  $f(p) = 0$  für  $p$  auflösen, haben wir das Problem, das dies formal ein unterbestimmtes Gleichungssystem ist ( $n$  Unbekannte aber nur  $m < n$  Gleichungen). Wir können aber unter bestimmten Bedingungen für  $m$  Variablen eindeutig auflösen, wenn wir die restlichen  $k := n - m$  Variablen fest halten.

Als Beispiel nehmen wir den Fall  $n = 2, m = k = 1$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Dann ist die Lösungsmenge von  $f(p) = 0$  gegeben durch die Einheitskugel  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , also den Einheitskreis.

$f(x, y) = 0$  für  $y$  eindeutig aufzulösen heißt den Einheitskreis als den Graphen einer Funktion  $y = y(x)$  zu schreiben. Dies geht nur lokal - sonst ist  $y$  mehrwertig. Nämlich geht es lokal zu jedem  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$  mit  $y_0 \neq 0$ . Zum Beispiel für  $y_0 > 0$  ist  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1 \cap \{y > 0\}$  und

$$\mathbb{S}^1 \cap \{y > 0\} = \{(x, g(x)) : x \in (-1, 1)\} \quad \text{mit} \quad g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Implizit definiert uns  $f(x, y) = 0$  also  $y$  eindeutig als Funktion von  $x$ , wenn  $(x, y)$  in einer hinreichend kleinen (in diesem Beispiel relativ großen) Umgebung des gegebenen Punktes  $(x_0, y_0)$  liegt. Diese Eigenschaft gilt nicht in den Punkten  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$ . Hier könnten wir aber lokal nach der  $x$ -Variablen auflösen.

**Bemerkung.** Sei  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Wir schreiben die Jacobimatrix einer Funktion  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$  in der Form

$$Df(p) = (D_x f(p), D_y f(p)),$$

wobei  $D_x f$  gerade alle partiellen Ableitungen von  $f$  bezüglich der  $x_1, \dots, x_k$ -Variablen und  $D_y f$  alle partiellen Ableitungen von  $f$  bezüglich der  $y_1, \dots, y_m$ -Variablen enthält. Es ist also  $D_x f(p) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  und  $D_y f(p) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

**Satz 16.21 (über implizite Funktionen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $n = k + m$  mit  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$  und sei ein Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  gegeben mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $D_y f(x_0, y_0)$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^k$  von  $x_0$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  von  $y_0$  mit  $U \times V \subset \Omega$ , sodass

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\} \quad (3)$$

für eine Funktion  $g \in C^1(U; V)$  gilt. Es ist weiter für  $x \in U$

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Falls  $f \in C^r(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , so folgt  $g \in C^r(U; \mathbb{R}^m)$ .

## 16.6 Untermannigfaltigkeiten

Eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  ist das gekrümmte Analogon eines  $k$ -dimensionalen affinen Unterraumes. Lokal kann solche Untermannigfaltigkeit durch eine  $C^1$ -Parametrisierung mit  $k$  Parametern beschrieben werden. Die Parametrisierung muss dabei invertierbar sein mit einer  $C^1$ -Inverse, d.h. es muss ein Diffeomorphismus sein. Reguläre  $C^1$ -Kurven sind deshalb 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten.

**Definition.** Eine bijektive Abbildung  $f : U \rightarrow V$  zwischen zwei offenen Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Homöomorphismus*, falls sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind.

**Definition.** Sei  $m < n$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$ .  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt eine  *$m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit*, falls es zu jedem  $x \in M$  eine offene Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $x$  gibt, ein  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und ein  $\psi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$  mit  $\text{Rang}(D\psi) = m$  auf  $U$ , sodass

$$\psi : U \rightarrow V \cap M \quad \text{ein Homöomorphismus ist.}$$

( $\psi$  heißt eine *lokale Parametrisierung* (oder *Immersion*) von  $M$ .)

$M$  heißt eine  *$m$ -dimensionale  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit*,  $r \in \mathbb{N}$ , falls zu jedem  $x \in M$  eine lokale Parametrisierung wie oben aber mit  $\psi \in C^r(U; \mathbb{R}^n)$  existiert.

**Bemerkung.** 1. Die Bedingung  $\text{Rang}(D\psi)(t) = m$  heißt, dass die Vektoren  $\partial_{t_1} \psi(t), \dots, \partial_{t_m} \psi(t) \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig sind.

2. Es gibt auch den Begriff „Mannigfaltigkeit“. Der Unterschied zwischen einer Untermannigfaltigkeit und einer Mannigfaltigkeit ist der, dass eine Mannigfaltigkeit nicht im höher dimensionalen Euklidischen Raum ( $\mathbb{R}^n$ ) eingebettet werden muss. Wir beschränken uns hier auf Untermannigfaltigkeiten.

Der nächste Satz zeigt, dass Untermannigfaltigkeiten nicht nur durch Parametrisierungen beschrieben werden.

**Satz 16.22** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m + l = n$  mit  $m, l, r \in \mathbb{N}$ . Dann sind äquivalent:

1.  $M$  ist  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^r$ .
2. (Niveaumengenbeschreibung). Zu jedem  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$  und  $g \in C^r(U; \mathbb{R}^l)$ , sodass

$$M \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

und

$$\text{rang } Dg(x) = l \quad \text{für alle } x \in U.$$

3. (Graphenbeschreibung). Für alle  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , sodass nach geeigneter Permutation der Koordinaten eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^m$  und  $h \in C^r(V, \mathbb{R}^l)$  existieren mit

$$M \cap U_0 = \{(x, h(x)) : x \in V\}.$$

4. (Geradebiegen). Für alle  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , ein offenes  $V \subset \mathbb{R}^n$  und einen  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$ ,

$$\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}) \cap V.$$

**Beispiel.** Die Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

ist gerade dargestellt als  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ , wobei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \|x\|_2^2 - 1$ . Damit ist  $\mathbb{S}^{n-1}$  nach Satz 16.22 eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ .

Untermannigfaltigkeiten sind glatt, da sie lokal diffeomorph zu Umgebungen in  $\mathbb{R}^m$  sind. Deswegen gibt es in jedem Punkt einer Untermannigfaltigkeit Tangentialvektoren.

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$   $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei  $p \in M$ . Dann heißt  $v \in \mathbb{R}^n$  *Tangentialvektor* von  $M$  in  $p$ , falls eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  in  $M$  existiert mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ . Die Menge aller Tangentialvektoren in  $p$  heißt *Tangentenraum* von  $M$  in  $p$  und wird mit  $T_p M$  bezeichnet. Ein *Normalenvektor* von  $M$  in  $p$  ist ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$ , der auf allen Tangentialvektoren  $v \in T_p M$  senkrecht (bzgl. des euklidischen Skalarproduktes) steht. Der *Normalenraum*  $N_p M$  ist der Raum aller Normalvektoren von  $M$  in  $p$ .

**Satz 16.23** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$   $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei  $p \in M$ . Dann ist der Tangentialraum  $T_p M$  ein  $m$ -dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Weiterhin gilt

1. Für die lokale Parametrisierung  $\psi$  mit  $\psi(a) = p, a \in \mathbb{R}^m$  gilt

$$T_p M = D\psi(a)(\mathbb{R}^m).$$

2. Sei  $M$  in einer Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$  dargestellt als Nullstellenmenge von  $g \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-m})$  mit  $\text{rang } Dg(x) = n - m$  für alle  $x \in U$ . Dann gilt

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(p)v = 0\}, \quad N_p M = \text{span}\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_{n-m}(p)\}.$$

## 16.7 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Oft wird in Anwendungen nach einem Extremum einer gegebenen Funktion gesucht unter Nebenbedingungen. Zum Beispiel kann man auf einem Berg den höchsten Punkt suchen, in dem die Temperatur 0 Grad ist. Angenommen die Temperatur ist 0 Grad entlang einer Kurve  $\gamma$ , will man also die Höhe entlang der Kurve maximieren. Offensichtlich muss dann im Maximum-Punkt  $x_0$  die Höhenlinie des Berges tangential sein zur Kurve  $\gamma$ . Sonst könnte man durch das laufen entlang  $\gamma$  die Höhe vergrößern. Aus der tangentialen Eigenschaft und aus Bemerkung 16.1 folgt, dass die Gradienten der Temperaturfunktion  $T$  und der Höhenfunktion  $h$  in  $x_0$  linear abhängig sind,  $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla T(x_0)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Im Folgenden sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$  und  $g \in C^1(U; \mathbb{R}^k)$ ,  $k < n$ . Wir suchen das Maximum (oder Minimum) der Funktion  $f$  auf der  $(n-k)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M := \{p \in U : g(p) = 0\}$ , also das Maximum von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $g_1 = \dots = g_k = 0$ .

**Satz 16.24 (Lagrangesche Multiplikatoren)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(U; \mathbb{R}^k)$ ,  $k < n$ . Sei  $M := \{p \in U : g(p) = 0\}$ . Falls

$$\text{rang } Dg(x) = k \quad \text{für alle } x \in M$$

und falls  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum von  $f$  über  $M$  besitzt, dann ist  $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$ , d.h. es existiert  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ , sodass

$$\nabla f(x_0) = (Dg(x_0))^T \lambda = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(x_0).$$

Insbesondere ist dann  $(x_0, \lambda)$  stationärer Punkt von  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, \mu) := f(x) - \sum_{j=1}^k \mu_j g_j(x)$ .

Die  $\lambda_j$  werden *Lagrangesche Multiplikatoren* genannt.

**Bemerkung.** 1. Satz 16.24 liefert eine notwendige (und nicht hinreichende) Bedingung für ein Extremum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$ .

2. Weil ein extremaler Punkt  $x_0$  ein stationärer Punkt der Funktion  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, \lambda) := f(x) - \lambda^T g(x)$  ist, können alle Kandidaten für Extrema gefunden werden durch das Lösen des Systems

$$\nabla h(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) - (Dg(x))^T \lambda \\ -g(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ist ein (i.A. nichtlineares) System von  $n + k$  Gleichungen in  $n + k$  Variablen.

**Beispiel.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Wir möchten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^T A x$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x) := \|x\|_2^2 - 1 = 0$$

(d.h. auf der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$ ) minimieren. Wir betrachten die Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x, \lambda) := x^T A x - \lambda(\|x\|_2^2 - 1).$$

Es ist  $\nabla h(x, \lambda) = 0$  genau dann, wenn  $Ax = \lambda x$  und  $\|x\|_2 = 1$ , d.h. genau dann, wenn  $x$  ein Eigenvektor (mit Norm 1) ist und  $\lambda$  der zugehörige Eigenwert. Da symmetrische  $(n \times n)$ -Matrizen reelle Eigenwerte haben und es gibt  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren, sind alle potenzielle lokale Extrema unter der Nebenbedingung Eigenvektoren von  $A$ .

Die Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  ist kompakt und daher existiert das globale Maximum sowie Minimum von  $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Weil für einen Eigenvektor  $x^{(j)}$  mit Eigenwert  $\lambda_j$  immer  $x^{(j)T} A x^{(j)} = \lambda_j \|x^{(j)}\|_2^2$  gilt, ist das Minimum von  $f$  auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  der kleinste Eigenwert und das Maximum der größte Eigenwert von  $A$ .

## 17 Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten hier das Riemannintegral auf Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Andere Integrale existieren, wie z.B. das Lebesgueintegral. Es zeigt sich, dass das Lebesgueintegral stärkere Eigenschaften als das Riemannintegral besitzt (kann z.B. auf allgemeineren Mengen in  $\mathbb{R}^n$  definiert werden). Das Lebesgueintegral wird detailliert in der Vorlesung über Maßtheorie untersucht.

Gute Referenzen für das Riemannintegral in  $\mathbb{R}^n$  sind [7] und [4].

## 17.1 Das Riemannintegral über Quader

**Definition.** Seien  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  mit  $a_j < b_j$  für alle  $j$ .  $Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $n$ -dimensionaler abgeschlossener Quader. Das zugehörige Volumen ist

$$|Q| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Sei  $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  ein abgeschlossener Quader und  $Z_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,k_i}\}$  eine Zerlegung von  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Menge

$$Z := Z_1 \times \cdots \times Z_n$$

heißt eine *Zerlegung des Quaders*  $Q$ . Für jedes  $j = (j_1, \dots, j_n)$  mit  $j_i \in \{1, \dots, k_i\}$  heißt

$$Q_j = Q_{j_1, \dots, j_n} = [x_{1, j_1-1}, x_{1, j_1}] \times \cdots \times [x_{n, j_n-1}, x_{n, j_n}]$$

ein *Teilquader* der Zerlegung  $Z$ .

**Definition.** Sei  $Z$  eine Zerlegung des Quaders  $Q \subset \mathbb{R}^n$  und seien  $Q_j, j \in J$  alle Teilquader zu  $Z$ . Sei  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, dann heißt

$$\overline{S}(f, Z) = \sum_{j \in J} \sup_{x \in Q_j} f(x) |Q_j|$$

die *Obersumme* und

$$\underline{S}(f, Z) = \sum_{j \in J} \inf_{x \in Q_j} f(x) |Q_j|$$

die *Untersumme* von  $f$  bezüglich  $Z$ .

**Lemma 17.1** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader,  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $Z_1, Z_2$  zwei beliebige Zerlegungen von  $Q$ . Dann gilt

$$\overline{S}(f, Z_1) \geq \underline{S}(f, Z_2).$$

**Definition.** Sei  $Q$  abgeschlossener Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

$$\int_Q f(x) \, dx := \sup_Z \underline{S}(f, Z)$$

heißt *unteres Riemann-Integral* und

$$\overline{\int}_Q f(x) \, dx := \inf_Z \overline{S}(f, Z)$$

heißt *oberes Riemann-Integral*. Das Supremum bzw. Infimum wird über alle Zerlegungen  $Z$  von  $Q$  genommen.

Falls  $\overline{\int}_Q f(x) \, dx = \underline{\int}_Q f(x) \, dx$ , so heißt  $f$  *Riemann-integrierbar über*  $Q$ , und

$$\int_Q f(x) \, dx := \overline{\int}_Q f(x) \, dx$$

heißt das *Riemann-Integral* von  $f$ . Die Menge aller über  $Q$  Riemann-integrierbarer Funktionen bezeichnen wir mit  $R(Q)$ .

**Korollar 17.2** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader,  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt  $\underline{\int}_Q f(x) \, dx \leq \overline{\int}_Q f(x) \, dx$ .

**Satz 17.3** Sei  $Q$  abgeschlossener Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $Q$  gibt, so dass

$$\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Satz 17.3 ist der Analogon zu Satz 11.2 für das Riemann-Integral in  $\mathbb{R}$ . Satz 11.2 wurde mit Hilfe von Treppenfunktionen formuliert. Dies kann auch hier getan werden, wenn man Treppenfunktionen in  $Q$  definiert als  $\psi(x) := \sum_{j=1}^m c_j \chi_{Q_j}(x)$ , wobei  $\cup_{j=1}^m Q_j = Q$ ,  $(Q_j)_j$  sind paarweise disjunkte Quader und  $c_j \in \mathbb{R}$  für alle  $j$ .

**Satz 17.4** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossener Quader.

(i) Falls  $f, g \in R(Q)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\lambda f + g \in R(Q)$  und

$$\int_Q \lambda f(x) + g(x) \, dx = \lambda \int_Q f(x) \, dx + \int_Q g(x) \, dx.$$

(ii) Falls  $f, g \in R(Q)$ , dann ist  $fg \in R(Q)$ .

(iii) Falls  $f, g \in R(Q)$  und  $f \leq g$  auf  $Q$ , dann ist

$$\int_Q f(x) \, dx \leq \int_Q g(x) \, dx.$$

(iv) Falls  $f \in R(Q)$ , dann ist  $|f| \in R(Q)$  und

$$\left| \int_Q f(x) \, dx \right| \leq \int_Q |f(x)| \, dx.$$

**Definition.** Sei  $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$  eine Zerlegung vom Quader  $Q$ . Dann heißt

$$\mu(Z) := \max_{i=1, \dots, n} \mu(Z_i)$$

die *Feinheit* der Zerlegung  $Z$ . Hier ist  $\mu(Z_i)$  die Feinheit der Zerlegung  $Z_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,k_i}\}$  des Intervalls  $[x_{i,0}, x_{i,k_i}] \subset \mathbb{R}$ , siehe Abschnitt 11.

**Satz 17.5** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt  $f \in R(Q)$ .

**Definition.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader und  $Z$  eine Zerlegung von  $Q$  mit  $m$  Teilquadern  $Q_j, j = 1, \dots, m$ . Seien  $\xi_j \in Q_j$  beliebig für alle  $j = 1, \dots, m$ . Die *Riemannsche Summe* von  $f$  bezüglich  $Z$  und  $(\xi_j)_{j=1}^m$  ist

$$S(f, Z, (\xi_j)_j) := \sum_{j=1}^m f(\xi_j) |Q_j|.$$

**Satz 17.6 (Riemannsche Summen)** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass für jede Zerlegung  $Z$  mit Feinheit  $\mu(Z) < \delta$  und für jede Wahl von Stützpunkten  $(\xi_j)_j$  gilt

$$\left| \int_Q f(x) \, dx - S(f, Z, (\xi_j)_j) \right| < \varepsilon.$$

Als nächstes beantworten wir die Frage, ob und wann das Integral über einen Quader als iteriertes Integral geschrieben werden kann. Betrachtet man, z.B.,  $\int_{[0,1] \times [2,3]} f(x) \, dx$  mit  $f(x) := x_1 x_2$ , stellt sich die Frage, ob folgende Rechnung erlaubt ist

$$\int_{[0,1] \times [2,3]} x_1 x_2 \, dx = \int_0^1 \left( \int_2^3 x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 x_1 \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2=2}^{x_2=3} dx_1 = \int_0^1 \frac{5}{2} x_1 \, dx_1 = \frac{5}{4}.$$

Die Antwort liefert der Satz von Fubini.

**Satz 17.7 (Fubini für Quader)** Seien  $P \subset \mathbb{R}^p$  und  $Q \subset \mathbb{R}^q$  abgeschlossene Quader,  $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann sind die Funktionen

$$x \mapsto \int_{\underline{Q}} f(x, y) \, dy, \quad x \mapsto \int_{\overline{Q}} f(x, y) \, dy$$

Riemann-integrierbar über  $P$  und

$$\int_{P \times Q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_P \left( \int_{\underline{Q}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_P \left( \int_{\overline{Q}} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

**Bemerkung.** Gleichzeitig sind natürlich die Funktionen

$$y \mapsto \int_{\underline{P}} f(x, y) \, dx, \quad y \mapsto \int_{\overline{P}} f(x, y) \, dx$$

Riemann-integrierbar über  $Q$  und

$$\int_{P \times Q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_Q \left( \int_{\underline{P}} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_Q \left( \int_{\overline{P}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Korollar 17.8** Falls unter den Voraussetzungen von Satz 17.7 für jedes  $x \in P$  das Integral  $\int_Q f(x, y) \, dy$  existiert, dann gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_P \left( \int_Q f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Und falls unter den Voraussetzungen von Satz 17.7 für jedes  $y \in Q$  das Integral  $\int_P f(x, y) \, dx$  existiert, dann

$$\int_{P \times Q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_Q \left( \int_P f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Insbesondere, für  $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_P \left( \int_Q f(x, y) \, dy \right) dx = \int_Q \left( \int_P f(x, y) \, dx \right) dy.$$

## 17.2 Das Riemannintegral über Jordan-messbare Mengen

Das nächste Ziel ist die Integration über allgemeinere Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  als nur Quader. Diese Erweiterung geschieht durch eine Approximation von Mengen in  $\mathbb{R}^n$  durch die Vereinigung von Quadern. Diese Approximation funktioniert aber nicht für alle Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren eine Klasse von Mengen, s.g. Jordan messbaren Mengen, für die diese Approximation und die Integration funktioniert.

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann gibt es stets einen abgeschlossenen Quader  $Q$  mit  $A \subset Q$ .  $A$  heißt *Jordan-messbar* (oder *quadrierbar*), falls  $\chi_A \in R(Q)$ . Ist dies der Fall, dann nennt man

$$|A| := \int_Q \chi_A(x) \, dx$$

den *Jordan-Inhalt* von  $A$ .

Ist  $A$  Jordan-messbar mit  $|A| = 0$ , so nennt man  $A$  eine *Jordan-Nullmenge*.

- Bemerkung.** 1. Man kann zeigen, dass die Definition von der Wahl des Quaders  $Q$  unabhängig ist, d.h. falls  $A \subset Q_1$  und  $A \subset Q_2$  mit abgeschlossenen Quadern  $Q_1, Q_2$ , dann  $\chi_A \in R(Q_1) \Leftrightarrow f \in R(Q_2)$  und  $\int_{Q_1} \chi_A(x) dx = \int_{Q_2} \chi_A(x) dx$ .
2. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader mit  $A \subset Q$ . Für jede Zerlegung  $Z$  von  $Q$  (mit Teilquadern  $Q_j, j = 1, \dots, m$ ) gilt

$$\bar{S}(\chi_A, Z) = \sum_{j=1}^m \sup_{x \in Q_j} \chi_A(x) |Q_j| = \sum_{Q_j \cap A \neq \emptyset} |Q_j|,$$

$$\underline{S}(\chi_A, Z) = \sum_{j=1}^m \inf_{x \in Q_j} \chi_A(x) |Q_j| = \sum_{Q_j \subset A} |Q_j|.$$

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $Q$  mit  $A \subset Q$  ein abgeschlossener Quader.

$$|A|_i := \int_{\underline{Q}} \chi_A(x) dx = \sup_Z \sum_{\substack{Q_j \subset A \\ Q_j \text{ Teilquader bzgl } Z}} |Q_j|$$

heißt der *innere Jordan-Inhalt* von  $A$ .

$$|A|_a := \int_{\overline{Q}} \chi_A(x) dx = \inf_Z \sum_{\substack{Q_j \cap A \neq \emptyset \\ Q_j \text{ Teilquader bzgl } Z}} |Q_j|$$

heißt der *äußere Jordan-Inhalt* von  $A$ .

- Bemerkung.** 1. Man kann zeigen, dass  $|A|_i$  und  $|A|_a$  unabhängig von der Wahl von  $Q$  sind.
2. Offenbar ist eine beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  genau dann Jordan-messbar, wenn  $|A|_i = |A|_a$ .

**Satz 17.9** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar. Dann sind

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad \overset{\circ}{A}, \quad \overline{A}$$

Jordan-messbar.

**Satz 17.10** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann

- (i)  $|\overset{\circ}{A}|_i = |A|_i, \quad |\overline{A}|_a = |A|_a.$
- (ii)  $|A|_i + |\partial A|_a = |A|_a.$
- (iii)  $A$  ist Jordan-messbar genau dann, wenn  $|\partial A| = 0$ .

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und Jordan-messbar und sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader, sodass  $A \subset Q$ . Eine beschränkte Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Riemann-integrierbar* über  $A$  (kurz  $f \in R(A)$ ), falls  $\widehat{f} \in R(Q)$ , wobei

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in Q \setminus A \end{cases}$$

die *triviale Fortsetzung* von  $f$  heißt. Dann definieren wir

$$\int_A f(x) dx := \int_Q \widehat{f}(x) dx.$$

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass die Integrierbarkeit von  $\widehat{f}$  und der Wert  $\int_Q \widehat{f}(x) dx$  unabhängig von der Wahl von  $Q \supset A$  sind.

**Satz 17.11** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar.

(i) Falls  $f, g \in R(A)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\lambda f + g \in R(A)$  und

$$\int_A \lambda f(x) + g(x) dx = \lambda \int_A f(x) dx + \int_A g(x) dx.$$

(ii) Falls  $f, g \in R(A)$ , dann ist  $fg \in R(A)$ .

(iii) Falls  $f, g \in R(A)$  und  $f \leq g$  auf  $A$ , dann ist

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx.$$

(iv) Falls  $f \in R(A)$ , dann ist  $|f| \in R(A)$  und

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

(v) Sei  $A = A_1 \cup A_2$ , wobei  $A_1, A_2$  Jordan-messbar sind mit  $\overset{\circ}{A}_1 \cap \overset{\circ}{A}_2 = \emptyset$ . Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  genau dann über  $A$  Riemann-integrierbar, wenn  $f|_{A_1}$  und  $f|_{A_2}$  Riemann-integrierbar sind. Ist dies der Fall, dann gilt:

$$\int_A f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx.$$

(vi) Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, beschränkt. Dann ist  $f \in R(A)$ .

**Satz 17.12 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar und  $f \in R(A)$ . dann gilt

$$\inf_{x \in A} f(x) |A| \leq \int_A f(x) dx \leq \sup_{x \in A} f(x) |A|.$$

**Korollar 17.13** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Jordan-Nullmenge und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt  $f \in R(A)$  und  $\int_A f(x) dx = 0$ .

**Satz 17.14 (Vernachlässigbarkeit von Jordan-Nullmengen)** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und Jordan-messbar,  $f \in R(B)$  und sei  $A \subset B$  eine Jordan-Nullmenge. Falls  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist und

$$g = f \text{ auf } B \setminus A,$$

dann gilt  $g \in R(B)$  und

$$\int_B f(x) dx = \int_B g(x) dx.$$

### 17.3 Das uneigentliche Riemannintegral

**Definition.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Folge  $(K_i)$  von kompakten Jordan-messbaren Teilmengen von  $U$  heisst *Ausschöpfungsfolge* für  $U$ , falls gilt

$$K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1} \forall i \text{ und } \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i = U.$$

**Definition.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar* über  $U$ , falls für jede Ausschöpfungsfolge  $(K_i)$  die Funktionen  $f|_{K_i}$  beschränkt und Riemann-integrierbar sind, und der Grenzwert

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f(x) \, dx$$

existiert und von der Ausschöpfungsfolge unabhängig ist. Ist dies der Fall, dann heißt

$$\int_U f(x) \, dx := \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f(x) \, dx$$

das *uneigentliche Riemann-Integral* von  $f$  über  $U$ .

**Bemerkung.** Das uneigentliche Riemannintegral kann also existieren auch falls  $U$  oder  $f$  unbeschränkt sind.

## 17.4 Das Riemannintegral über Normalbereiche

Häufig wird das Integral gesucht über eine Menge, die zwischen den Graphen zweier reellwertiger Funktionen liegt. Solche Mengen heißen Normalbereiche.

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und Jordan-messbar, und  $\varphi, \psi : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für  $x \in A$ . Die Menge

$$\mathcal{N} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A \text{ und } \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$$

heißt *Normalbereich* (zu  $A, \varphi$  und  $\psi$ ) oder auch Normalbereich in der  $t$ -Richtung.

**Satz 17.15** Sei  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  Normalbereich zu  $A, \varphi$  und  $\psi$ .  $\mathcal{N}$  ist Jordan-messbar und

$$|\mathcal{N}| = \int_Q \chi_{\mathcal{N}}(x, t) \, d(x, t) = \int_A (\psi(x) - \varphi(x)) \, dx,$$

wobei  $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein beliebiger abgeschl. Quader mit  $A \subset Q$  ist. Falls  $f : \overline{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, dann ist  $f \in R(\mathcal{N})$  und es gilt

$$\int_{\mathcal{N}} f(x, t) \, d(x, t) = \int_A \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) \, dt \right) dx.$$

**Beispiel.** Das Integral  $\int_{\overline{B_1(0)}} f(x, y) \, d(x, y)$  für  $f(x, y) := x^2$  und  $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  kann berechnet werden mit Hilfe von Satz 17.15, in dem man  $A := [-1, 1], \varphi(x) := -\sqrt{1-x^2}$  und  $\psi(x) := \sqrt{1-x^2}$  definiert. Man erhält  $\int_{\overline{B_1(0)}} f(x, y) \, d(x, y) = \pi/4$ .

## 17.5 Der Transformationsatz

Für stetige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir folgende Substitutionsformel in Satz 11.13 gezeigt.

$$\int_c^d f(\varphi(y)) \varphi'(y) \, dy = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \, dx$$

für alle  $\varphi \in C^1([c, d], \mathbb{R})$  und  $c \leq d$ .

Falls wir uns auf den Fall von einem injektiven  $\varphi$  beschränken, ist  $\varphi' \geq 0$  oder  $\varphi' \leq 0$  auf  $[c, d]$ . Im Fall  $\varphi' \geq 0$  gilt  $\varphi(c) \leq \varphi(d)$

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \, dx = \int_{\varphi([c, d])} f(x) \, dx$$

(in der Notation der Riemann-Integration in  $\mathbb{R}^n$ ). Im Fall  $\varphi' \leq 0$  gilt  $\varphi(c) \geq \varphi(d)$

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \, dx = - \int_{\varphi([c,d])} f(x) \, dx.$$

In beiden Fällen gilt also

$$\int_{\varphi([c,d])} f(x) \, dx = \int_c^d f(\varphi(y)) |\varphi'(y)| \, dy.$$

Wir verallgemeinern jetzt diese Formel für  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 17.16 (Transformationssatz)** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar (und beschränkt),  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\bar{B} \subset V$  und sei  $\Phi \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ . Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge, sodass  $\Phi|_{B \setminus N}$  injektiv ist und  $\det D\Phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in B \setminus N$ . Dann ist  $\Phi(B)$  Jordan-messbar und für  $f : \Phi(B \setminus N) \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig gilt  $f \in R(\Phi(B))$  und

$$\int_{\Phi(B)} f(x) \, dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det D\Phi(y)| \, dy.$$

## 17.6 Integralsätze: Satz von Gauß und Satz von Stokes

Für Funktionen  $F \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  haben wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, d.h.

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Das Integral wird also anhand der Randwerte der Stammfunktion ausgedrückt. Die Sätze von Gauß und Stokes verallgemeinern dieses Resultat im gewissen Sinne für  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ .

### 17.6.1 Satz von Gauß in der Ebene

**Definition.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Die *Divergenz* von  $F$  ist

$$\operatorname{div} F := \nabla \cdot F := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j.$$

**Definition.** Eine auf  $[a, b]$  injektive Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  (d.h. einfache, geschlossene Kurve) heißt *Jordan-Kurve*.

Eine Jordan-Kurve heißt *positiv orientiert*, falls ihre Spur gegen den Uhrzeigersinn verlaufen wird.

**Satz 17.17 (Gauß in der Ebene)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich in  $x$  sowie in  $y$ -Richtung. Sei  $\partial\Omega$  die Spur einer positiv orientierten stückweise  $C^1$  Kurve  $\gamma$  und sei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\gamma} f \cdot n \, ds,$$

wobei  $n$  der äußere Normaleneinheitsvektor an  $\partial\Omega$  ist.

**Bemerkung.** 1. Da  $\Omega$  ein Normalbereich ist, ist  $\partial\Omega$  automatisch eine Jordan-Kurve.

2. Viele Mengen  $\Omega$ , die kein Normalbereich sind, lassen sich in kleinere Normalbereiche zerlegen. Zum Beispiel der Kreisring  $\{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi]\}$  kann zerlegt werden in die zwei Normalbereiche  $\Omega_1 := \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [1, 2], \theta \in [0, \pi/2]\}$ ,  $\Omega_2 := \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [1, 2], \theta \in [\pi/2, \pi]\}$ ,  $\Omega_3 := \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [1, 2], \theta \in [\pi, 3\pi/2]\}$ , and  $\Omega_4 := \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [1, 2], \theta \in [3\pi/2, 2\pi]\}$ . Das Integral über  $\Omega$  ist dann die Summe der Integrale über  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Es ist einfach zu zeigen, dass sich in der Summe  $\int_{\partial\Omega_1} f \cdot n \, ds + \int_{\partial\Omega_2} f \cdot n \, ds$  die Anteile über die gemeinsamen Trennlinien weg addieren. Der Satz von Gauß bleibt also richtig für messbare Mengen, die sich in Normalbereiche zerlegen lassen.
3. Weil  $\partial\Omega$  stückweise  $C^1$  ist, existiert der äußere Normaleneinheitsvektor  $n$  in Satz 17.17 bis auf endlich viele Punkte auf  $\partial\Omega$ . Da endlich viele Punkte im reellen Intervall eine Nullmenge sind, folgt aus Korollar 17.13, dass man in diesen Punkten den Normalenvektor  $n$  beliebig definieren kann.
4. Satz von Gauß erlaubt eine physikalische Interpretation der Divergenz. Falls  $f$  der Geschwindigkeitsvektor einer Strömung ist, dann ist  $n \cdot f$  die Geschwindigkeitskomponente nach außen durch  $\partial\Omega$ . Der Satz sagt also, dass die Divergenz den Fluss aus einem Volumen beschreibt. Bei positiver Divergenz in  $x \in \Omega$  ist der Fluss aus einem kleinen Volumen um  $x$  nach außen (die Strömung „divergiert“) und bei negativer Divergenz nach innen.

**Korollar 17.18 (Inhaltsberechnung in  $\mathbb{R}^2$ )** Sei  $\Omega$  und  $\gamma$  wie in Satz 17.17. Dann gilt für den Inhalt  $|\Omega|$

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot n \, ds.$$

**Bemerkung.** Man kann also den Inhalt anhand eines Kurvenintegrals berechnen.

### 17.6.2 Oberflächenintegrale in $\mathbb{R}^3$

Unser Ziel ist reellwertige Funktionen über Flächen in  $\mathbb{R}^3$  zu integrieren. Außerdem möchten wir den Flächeninhalt eines Flächenstücks berechnen.

**Definition.** Für zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  heißt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

das *Vektorprodukt* (*Kreuzprodukt*) von  $a$  und  $b$ .

**Bemerkung.** 1. Formal ist  $a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ , wobei  $e_1, e_2$  und  $e_3$  die standard-Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^3$  sind.

2. Es gelten die Rechenregeln

- $a \times b = -(b \times a)$
- $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
- $a \times a = 0$
- $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$ , d.h.  $a \times b$  ist senkrecht an  $a$  und  $b$

3. Wie man aus der linearen Algebra weiss,  $\|a \times b\|_2$  ist gleich dem Inhalt des Parallelogramms mit den Seiten  $a$  und  $b$ .

4. Die Richtung des Vektors  $a \times b$  folgt der „Drei-Finger-Regel“.

Wir entwickeln die Integrationstheorie für Flächen - spezielle zwei dimensionale Untermannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition.** Eine zwei dimensionale Untermannigfaltigkeit  $S \subset \mathbb{R}^3$  heißt *Fläche*, falls eine globale injektive Parametrisierung (i.A. kein Homöomorphismus)  $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen existiert, sodass  $S = \Phi(G)$  für ein  $G \subset U$ .

Eine *Fläche mit Rand* ist eine Fläche  $S$  mit  $S = \Phi(\bar{G})$  und  $\Phi(\dot{G}) \cap \Phi(\partial G) = \emptyset$ .  $\partial S := \Phi(\partial G)$  heißt der *Rand* von  $S$ .

**Beispiel.** Zum Beispiel die Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist eine Fläche ohne Rand, wobei z.B. die obere Hemisphäre eine Fläche mit Rand ist.

**Bemerkung.** Sei  $S$  eine Fläche mit der  $C^1$ -Parametrisierung  $\Phi : (u, v) \mapsto \Phi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ , sodass  $S = \Phi(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ .

1. Für  $(u, v) \in G$  ist

$$\text{span}\{\partial_u \Phi(u, v), \partial_v \Phi(u, v)\} = T_{\Phi(u, v)} S,$$

also der Tangentialraum im Punkt  $\Phi(u, v)$ . Der Normalenraum von  $S$  in  $\Phi(u, v)$  wird dann gespannt von dem *Normalenvektor*

$$N(u, v) := \partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v).$$

2. Sei einfachheitshalber  $G$  ein Rechteck. Nach einer Zerlegung von  $G$  in  $m$  Teilrechtecke  $G_j$  mit Stützpunkten  $(u_j, v_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  und mit Seitenlängen  $\Delta u_j, \Delta v_j$  liefert  $\|\partial_u \Phi(u_j, v_j) \times \partial_v \Phi(u_j, v_j)\|_2 \Delta u_j \Delta v_j$  anschaulich eine Approximation des Flächeninhaltes des Flächenstücks  $\Phi(G_j)$ . Die Summe über  $j$

$$\sum_{j=1}^m \|\partial_u \Phi(u_j, v_j) \times \partial_v \Phi(u_j, v_j)\|_2 \Delta u_j \Delta v_j$$

ist eine Riemann-Summe für die Funktion  $(u, v) \mapsto \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\|_2$ . Analog ist

$$\sum_{j=1}^m f(\Phi(u_j, v_j)) \|\partial_u \Phi(u_j, v_j) \times \partial_v \Phi(u_j, v_j)\|_2 \Delta u_j \Delta v_j$$

eine Riemann-Summe für die Funktion  $(u, v) \mapsto f(\Phi(u, v)) \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\|_2$ .

Falls  $f$  stetig auf  $\Phi(\bar{G})$  und  $\Phi \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ , dann sind die obigen zwei Funktionen Riemann integrierbar, sodass folgende Definition Sinn macht.

**Definition.** Sei  $S = \Phi(G)$  eine Fläche mit  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $\Phi$  eine globale Parametrisierung zu  $S$ , wie in der Definition der Fläche. Der *Flächeninhalt* von  $S$  ist

$$A(S) := \int_G \|N(u, v)\|_2 \, d(u, v) = \int_G \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\|_2 \, d(u, v).$$

Sei  $f \in C(\Phi(\bar{G}), \mathbb{R})$ . Dann heißt

$$\int_S f \, d\sigma := \int_G f(\Phi(u, v)) \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\|_2 \, d(u, v)$$

das *Oberflächenintegral* von  $f$  über  $S$ .

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass  $A(S)$ , sowie  $\int_S f \, d\sigma$  unabhängig von der Wahl der Parametrisierung  $\Phi$  sind.

### 17.6.3 Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

**Definition.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Die *Rotation* von  $F$  ist

$$\operatorname{rot} F := \nabla \times F := \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

**Satz 17.19 (Stokes)** Sei  $S = \Phi(\overline{G})$  eine Fläche mit Rand mit der Parametrisierung  $\Phi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$  (injektiv), wobei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $G \subset U$  ein Normalbereich in der  $x_1$  sowie in der  $x_2$ -Richtung ist mit positiv orientiertem Rand. Sei  $F \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$  für ein offenes  $V \supset \Phi(U)$ . Dann gilt

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot \vec{dx},$$

wobei  $\nu(u, v) := N(u, v) / \|N(u, v)\|_2$  der äußere Normaleneinheitsvektor an  $S$  im Punkt  $\Phi(u, v)$  ist.

- Bemerkung.**
1. Streng gesagt, haben wir die Notation  $\int_{\partial S} F \cdot \vec{dx}$  nicht definiert. Es wird natürlich das Kurvenintegral 2. Art entlang der Kurve, die  $\partial S$  erzeugt, gemeint. Das heißt  $\int_{\partial S} F \cdot \vec{dx} = \int_{\Phi(\gamma)} F \cdot \vec{dx}$ , wobei  $\gamma$  die positiv orientierte Kurve in  $\mathbb{R}^2$  mit der Spur  $\partial G$  ist.
  2. Aus den Voraussetzungen folgt, dass  $\partial S = \Phi(\partial G)$  die Spur einer stückweise  $C^2$ -Kurve ist.
  3. Der Satz von Stokes erlaubt eine physikalische Interpretation der Rotation. Sei  $F$  die Geschwindigkeit einer Strömung in  $\mathbb{R}^3$ . Dann misst

$$\int_{\partial S} F \cdot \vec{dx} = \int_{\Phi(\gamma)} F \cdot \vec{dx}$$

die Rotation der Strömung um  $S$ , weil man die tangentielle Komponente von  $F$  entlang der Kurve  $\partial S$  integriert. Falls also  $|((\nabla \times F) \cdot \nu)(x_0)|$  groß ist in einem  $x_0$ , dann ist  $\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu \, d\sigma$  groß für alle  $S$  klein genug mit  $x_0 \in S$  und mit Normalenvektoren, die in ähnlicher Richtung zu  $\nu$  zeigen. Nach dem Satz von Stokes rotiert dann die Strömung lokal stark um  $x_0$ .

### 17.6.4 Satz von Gauß in $\mathbb{R}^3$

**Definition.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  heißt ein  $C^1$ -Normalbereich bezüglich der  $xy$ -Ebene, falls

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in K, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

wobei  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt und Jordan-messbar ist und

- (i)  $\varphi_{1,2} \in C^1(K, \mathbb{R})$ ,
- (ii)  $\partial K$  ist eine positiv orientierte stückweise  $C^1$  Jordan-Kurve,
- (iii)  $\forall i \in \{1, 2\}$  wird der Graph von  $\varphi_i$  parametrisiert durch  $\Phi^{(i)} := (g^{(i)}, \varphi_i \circ g^{(i)})$ , wobei  $g^{(i)} : K_i \rightarrow K$  eine Substitution wie in Satz 17.16 ist und  $K_i \subset \mathbb{R}^2$  kompakt. Außerdem gilt  $\det Dg^{(1)} < 0$  auf  $K_1$  und  $\det Dg^{(2)} > 0$  auf  $K_2$  (bis auf Nullmengen).

**Bemerkung.** Es gibt also die zwei Flächen

$$S_i := \Phi^{(i)}(K_i) = \{(g^{(i)}(u, v), \varphi_i(g^{(i)}(u, v))) : (u, v) \in K_i\}$$

für  $i = 1, 2$ .  $S_1$  und  $S_2$  sind der untere bzw. obere „Deckel“ des Normalbereiches  $\Omega$ .

**Satz 17.20 (Gauß in  $\mathbb{R}^3$ )** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Normalbereich bezüglich der  $xy$ ,  $yz$  und  $xz$ -Ebenen. Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen mit  $\Omega \subset U$  und  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

wobei  $\nu$  der äußere Normaleneinheitsvektor an  $\partial\Omega$  ist.

**Bemerkung.** Die Vorzeichen-Bedingungen an  $\det Dg^{(j)}$  versichern, dass  $\nu = N/\|N\|_2$ , d.h., dass

$$N(u, v) = \partial_u \Phi^{(j)}(u, v) \times \partial_v \Phi^{(j)}(u, v)$$

tatsächlich nach außen von  $\Omega$  zeigen. Zum Beispiel, auf dem unteren Deckel  $S_1$  ist

$$N(u, v) = \partial_u \Phi^{(1)}(u, v) \times \partial_v \Phi^{(1)}(u, v),$$

sodass

$$N_3(u, v) = (\partial_u \varphi_1^{(1)} \partial_v \varphi_2^{(1)} - \partial_u \varphi_2^{(1)} \partial_v \varphi_1^{(1)})(u, v) = \det Dg^{(1)}(u, v).$$

Wegen  $\det Dg^{(1)} < 0$  zeigt  $N$  tatsächlich nach unten.

## Literatur

- [1] A. Deitmar. Analysis. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] O. Forster. Analysis 1. Springer-Spektrum, 2016.
- [3] O. Forster. Analysis 2. Springer-Spektrum, 2017.
- [4] H. Heuser. Lehrbuch der Analysis. 2. Lehrbuch der Analysis / von Harro Heuser. Teubner, 2004.
- [5] W. Kabbalo. Einführung in die Analysis II. Spektrum, Akad. Verl., 1997.
- [6] K. Königsberger. Analysis 2. Number Bd. 2 in Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [7] W. Walter. Analysis 2. Springer Berlin Heidelberg, 2002.